

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE TELE-INFORMÁTICA
PROG. DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENG. DE TELE-INFORMÁTICA

Estratégias de Estimação para Canais Variantes no Tempo em Sistemas OFDM

Rui Facundo Vigelis

Fortaleza – CE

Agosto / 2006

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE TELE-INFORMÁTICA
PROG. DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENG. DE TELE-INFORMÁTICA

Estratégias de Estimação para Canais Variantes no Tempo em Sistemas OFDM

Autor:

Rui Facundo Vigelis

Orientador:

Charles Casimiro Cavalcante

Co-orientador:

João Cesar Moura Mota

*Dissertação apresentada à Coordenação do Programa de Pós-graduação em Engenharia de Tele-informática da Universidade Federal do Ceará como parte dos requisitos exigidos para obtenção do grau de **Mestre em Engenharia de Tele-informática**.*

Fortaleza – CE

Agosto / 2006

V730e

Vigelis, Rui Facundo

Estratégias de estimação para canais variantes no tempo em
Sistemas OFDM / Rui Facundo Vigelis, 2006.

100 f. : il.

Orientador: Prof. Dr. Charles Casimiro Cavalcante
Co-Orientador: Prof. Dr. João Cesar Moura Mota
Dissertação (Mestrado em Engenharia de Teleinformática) -
Centro de Tecnologia, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza,
2006.

1. Sistemas OFDM 2. Interferência entre sub-portadoras
3. Estimação de canais variantes no tempo I. Cavalcante,
Charles Casimiro (orient.) II. Mota, João Cesar Moura
(co-orientador) III. Título

CDD 621.3

Rui Facundo Vigelis

Estratégias de Estimação para Canais Variantes no Tempo em Sistemas OFDM

Esta Dissertação foi julgada adequada para a obtenção do título de Mestre em Engenharia de Teleinformática e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-graduação de Engenharia de Teleinformática da Universidade Federal do Ceará.

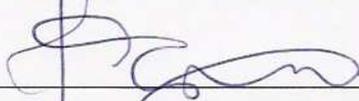


Rui Facundo Vigelis

Banca Examinadora:



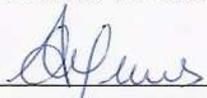
Prof. Dr. Charles Casimiro Cavalcante
Universidade de Federal do Ceará



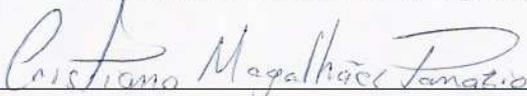
Prof. Dr. João Cesar Moura Mota
Universidade de Federal do Ceará



Prof. Dr. Francisco Rodrigo P. Cavalcanti
Universidade de Federal do Ceará



Prof.ª Dr.ª Aline de Oliveira Neves
Universidade Estadual de Campinas



Prof. Dr. Cristiano Magalhães Panazio
Universidade de São Paulo

Fortaleza, 31 de agosto de 2006

*Este trabalho é dedicado
aos meus pais **Vytautas** e **Verônica**
e à minha irmã **Vanessa***

Agradecimentos

À Fundação Cearense de Apoio ao Desenvolvimento Científico e Tecnológico (FUNCAP), pelo apoio financeiro e a oportunidade de poder realizar este trabalho.

Ao prof. João Cesar, pela co-orientação, incentivo, e proveitosas discussões técnicas que deram o suporte técnico e teórico necessários à realização deste trabalho.

Ao prof. Charles Cavalcante, pela orientação e pelos longos períodos dedicados a essa tarefa em detrimento de seu próprio estudo de pesquisa.

Ao prof. Rodrigo Cavalcante, membro da banca examinadora, pelos valiosos comentários e sugestões, que em muito contribuíram na melhoria da qualidade da dissertação.

Aos profs. Aline Neves e Cristiano Panazio, por terem aceito o convite de participar da banca examinadora, e pela minuciosa análise da dissertação.

Aos amigos do Grupo de Pesquisa em Telecomunicações Sem Fio (GTEL), em especial André, Darlan, Fábio, Cibelly, Rafael e Velsler, pelas discussões técnicas e o bate-papo nos intervalos das nossas atividades.

A meus pais Vytautas e Verônica, e minha irmã Vanessa, pelo amor incondicional e compreensão pelo meu distanciamento durante a confecção deste trabalho.

Resumo

Nesta dissertação é abordado o problema de estimação de canais variantes no tempo em sistemas de modulação OFDM (*Orthogonal Frequency Division Multiplexing*). Foi escolhido o modelo de canal WSS-US (*Wide Sense Stationary–Uncorrelated Scattering*) com um número de percursos bem definido. Mostrou-se que, quando o canal é seletivo no tempo, as sub-portadoras consistem na DFT (*Discrete Fourier Transform*) da média conjunta de N_c amostras do canal no tempo, em que N_c é o número de sub-portadoras empregadas. Com a suposição de que o canal obedece o modelo TDL (*Tapped Delay Line*) e os símbolos de cada sub-portadora têm mesma potência, também foi mostrado que a potência do canal se divide entre a potência da sub-portadora e a potência da ICI (*Inter-Carrier Interference*). Para uma disposição em *grid* das sub-portadoras piloto, é derivado um estimador MMSE (*Minimum Mean Square Error*) que explora as correlações do canal tanto no tempo como na frequência. Da suposição de que as correlações das sub-portadoras podem ser separadas como o produto entre as correlações do canal no tempo e na frequência, obtêve-se que a estrutura de filtragem do estimador IIR (*Infinite Impulse Response*) pode ser separada entre as estimativas somente sobre as sub-portadoras piloto e o processo de interpolação, seja no tempo como na frequência. É proposto um estimador robusto, que não requer as estimativas das correlações do canal e a variância do ruído, apenas considerando que a frequência Doppler máxima, a potência do canal e a potência das sub-portadoras são conhecidas. Também foi considerado um estimador adaptativo derivado a partir da estrutura de filtragem do estimador MMSE. A seção do filtro que explora as correlações do canal na frequência é estimada pelos algoritmos LORAF (*Low-Rank Adaptive Filter*) e OPAST (*Orthogonal Projection Approximation Subspace Tracking*). Já os filtros que exploram as correlações temporais do canal são estimados adaptativamente por meio de um algoritmo baseado em decomposição QR, que suporta uma versão rápida de complexidade computacional da ordem do comprimento filtro empregado. Todas as técnicas de estimação analisadas ou propostas são comparadas utilizando simulação em computador.

Abstract

This dissertation deals with the estimation of time-selective fading channels in OFDM (*Orthogonal Frequency Division Multiplexing*) coding systems. We considered that the channel obeys the WSS-US (*Wide Sense Stationary–Uncorrelated Scattering*) model, with an integral number of multi-paths. In presence of time-selective fading, we showed that the sub-carriers are the DFT (*Discrete Fourier Transform*) of the average of N_c channel samples in time-domain, where N_c is the number of employed sub-carriers. Under the assumption that the channel obeys the TDL (*Tapped Delay Line*) model, and the transmitted symbols at each sub-carrier have the same power, we also showed that the channel power is divided between the sub-carrier and ICI (*Inter-Carrier Interference*) power. For a grid placement of the pilot sub-carriers, we derived a MMSE (*Minimum Mean Square Error*) estimator that is able to exploit both time and frequency correlations. Supposing the sub-carrier correlations can be separated as the product between the time and frequency correlations, the filtering structure of the IIR (*Infinite Impulse Response*) estimator can be separated as the estimation at the pilot positions and the interpolation over time and frequency domain. Just taking into account that the maximum Doppler frequency and the channel and sub-carrier power are known at the receiver, we proposed a robust estimator that does not require the estimation of channel correlations and noise variance. We considered an adaptive estimator derived from the filtering structure obtained in the MMSE estimator. The filtering section that exploits the frequency-domain channel correlations is estimated by the LORAF (*Low-Rank Adaptive Filter*) and OPAST (*Orthogonal Projection Approximation Subspace Tracking*) algorithms. The filters that exploits the time-domain channel correlations are estimated adaptively by an algorithm based on QR decomposition, which supports a fast version, whose computational complexity has the order of the filter length. All the analyzed and proposed estimation techniques are compared by computer simulation.

Sumário

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Lista de Abreviaturas e Siglas

Lista de Símbolos

1	Introdução	17
1.1	Contribuições desta dissertação	20
1.2	Organização	22
2	Descrição e Modelagem	23
2.1	Canal com Desvanecimento	23
2.1.1	Canal WSS-US	25
2.1.2	Canal TDL-Jakes	27
2.2	Descrição do Sistema de Modulação OFDM	30
2.3	Variação Temporal do Canal no OFDM	34
2.4	Correlações do Canal TDL no OFDM	36
2.5	Derivação da Potência da ICI	39
2.5.1	Limite Superior para σ_{ICI}^2	42
3	Estimador MMSE	44
3.1	Derivação do Estimador MMSE	44
3.1.1	Estimador IIR	45

3.1.2	Estimador FIR	50
3.1.3	Cálculo do MMSE	52
3.2	Estimador Robusto	56
3.2.1	Análise de Descasamento	57
3.2.2	Derivação do Estimador Robusto	58
4	Estruturas Adaptativas	65
4.1	Estimação de Subespaço	65
4.1.1	Algoritmo LORAF	67
4.1.2	Algoritmo PAST	72
4.2	Estimação dos Filtros Temporais	75
4.3	Estimação dos Parâmetros ρ e K	80
5	Simulações	82
5.1	Comentários	84
6	Conclusões e Perspectivas	90
	Apêndice A – Multiplicadores de Lagrange	92
	Apêndice B – Métodos Numéricos	95
B.1	Rotações de Givens	95
B.2	Back-substitution	96
	Referências Bibliográficas	98

Lista de Figuras

2.1	Modelo de canal TDL.	28
2.2	Espectro de Jakes com $f_d = 75$ Hz.	29
2.3	Sistema OFDM.	31
2.4	Curvas de $\nu_{d,1} \times \sigma_{ICI}^2$ para diferentes espectros Doppler.	43
3.1	Disposição em <i>grid</i> das sub-portadoras piloto.	45
3.2	Relação entre os índices usados na derivação do estimador MMSE.	46
3.3	Estimação das sub-portadoras piloto baseada no critério MMSE.	50
3.4	Interpolador passa-baixa.	50
3.5	Estimador MMSE.	51
5.1	Curvas de aprendizado para (a) \mathbf{U} perfeitamente conhecido e (b) \mathbf{F} como subespaço. Foram adotados SNR = 10 dB, $f_d = 500$ Hz e $M_t = 1$	85
5.2	Curvas de aprendizado para \mathbf{U} estimado pelos algoritmos (a) LORAF3 e (b) OPAST. Foram adotados SNR = 10 dB, $f_d = 500$ Hz e $M_t = 1$	86
5.3	Curvas de $\overline{\text{MSE}} \times \text{SNR}$ para (a) \mathbf{U} perfeitamente conhecido e (b) \mathbf{F} como subespaços. Foram adotados $f_d = 200$ Hz e $M_t = 3$	87
5.4	Curvas de $\overline{\text{MSE}} \times \text{SNR}$ para \mathbf{U} estimado pelos algoritmos (a) LORAF3 e (b) OPAST. Foram adotados $f_d = 200$ Hz e $M_t = 3$	88
5.5	Curvas de aprendizado comparativas entre \mathbf{U} perfeitamente conhecido e estimado pelos algoritmos LORAF3 e OPAST. Foram adotados SNR = 10 dB, $f_d = 500$ Hz e $M_t = 1$	89

Lista de Tabelas

4.1	Algoritmo LORAF1.	69
4.2	Algoritmo LORAF2.	70
4.3	Algoritmo LORAF3.	72
4.4	Algoritmos PAST e OPAST.	74
4.5	Atualização dos coeficientes dos filtros temporais.	77
4.6	Algoritmo baseado em decomposição QR.	80
4.7	Estimação dos parâmetros ρ e K	81
5.1	Parâmetros de simulação.	83

Lista de Abreviaturas e Siglas

ADSL	<i>Asymmetric Digital Subscriber Line</i> , p. 17
AR	<i>Auto-Regressive</i> , p. 20
CP	<i>Cyclic Prefix</i> , p. 18
DAB	<i>Digital Audio Broadcasting</i> , p. 17
DFT	<i>Discrete Fourier Transform</i> , p. 20
DMT	<i>Discrete Multi-Tone</i> , p. 17
DPSK	<i>Differential Phase-Shift Keying</i> , p. 18
DVB-T	<i>Digital Video Broadcasting – Terrestrial</i> , p. 17
FFT	<i>Fast Fourier Transform</i> , p. 17
FIR	<i>Finite Impulse Response</i> , p. 44
HIPERLAN2	<i>High Performance Radio Local Area Network 2</i> , p. 17
ICI	<i>Inter-Carrier Interference</i> , p. 17
IDFT	<i>Inverse Discrete Fourier Transform</i> , p. 30
IEEE	<i>Institute of Electrical and Electronics Engineers</i> , p. 17
IFFT	<i>Inverse Fast Fourier Transform</i> , p. 31
IIR	<i>Infinite Impulse Response</i> , p. 21
ISI	<i>Inter-Symbol Interference</i> , p. 17
LMMSE	<i>Linear Minimum Mean Square Error</i> , p. 19
LMS	<i>Least Mean Square</i> , p. 19
LORAF	<i>Low-Rank Adaptive Filter</i> , p. 19
LS	<i>Least Square</i> , p. 18
MMSE	<i>Minimum Mean Square Error</i> , p. 18
MSE	<i>Mean Square Error</i> , p. 19
OFDM	<i>Orthogonal Frequency Division Multiplexing</i> , p. 17
OPAST	<i>Orthogonal Projection Approximation Subspace Tracking</i> , p. 21
PAST	<i>Projection Approximation Subspace Tracking</i> , p. 65
PSK	<i>Phase-Shift Keying</i> , p. 18

QAM	<i>Quadrature Amplitude Modulation</i> , p. 44
SAT	<i>Subspace Amplitude Tracking</i> , p. 19
SINR	<i>Signal-to-ICI plus Noise Ratio</i> , p. 18
SNR	<i>Signal-to-Noise Ratio</i> , p. 18
ST	<i>Subspace Tracking</i> , p. 19
TDL	<i>Tapped Delay Line</i> , p. 19
WLAN	<i>Wireless Local Area Network</i> , p. 17
WPAN	<i>Wireless Personal Area Network</i> , p. 17
WSS	<i>Wide Sense Stationary</i> , p. 26
WSS-US	<i>Wide Sense Stationary–Uncorrelated Scattering</i> , p. 23

Lista de Símbolos

$(\cdot)^\dagger$	Pseudo-inversa de matriz, p. 48
$(\cdot)^H$	Hermitiano de matriz ou vetor, p. 32
$(\cdot)^T$	Transposto de matriz ou vetor, p. 31
$(\cdot)_N$	Operador módulo N , para sub-índice maiúsculo, p. 32
$(\cdot)_n$	Indica o n -ésimo elemento de um vetor, para sub-índice maiúsculo, p. 35
$(\cdot)_{mn}$	Entrada mn de uma matriz, p. 34
$\lfloor \cdot \rfloor$	Operador “maior inteiro menor ou igual a”, p. 32
$\delta(t)$	Função impulso de tempo contínuo, p. 25
$\delta[n]$	Função impulso de tempo discreto, p. 58
$\gamma_k(t)$	Amplitude complexa do k -ésimo percurso do canal, p. 28
$\gamma_k[m]$	Amostra de $\gamma_k(t)$ no instante mT_s , p. 30
κ	Razão σ_H^2/σ_h^2 , p. 38
$\nu_{d,1}$	Frequência máxima da densidade espectral de potência de $\gamma_k[m]$ ($\nu_{d,1} = T_s f_d$), p. 30
$\nu_{d,2}$	Frequência máxima da densidade espectral de potência de $\gamma_k[mN_s]$ ($\nu_{d,2} = N_s \nu_{d,1}$), p. 39
$\nu_{d,3}$	Frequência máxima da densidade espectral de potência de $\gamma_k[mN_s M_t]$ ($\nu_{d,3} = M_t \nu_{d,2}$), p. 49
ω_{N_c}	Denota $\exp(-j2\pi/N_c)$, p. 31
$\rho(\tau)$	Potência média do percurso de atraso τ , p. 28
ρ	Potência média de $z[n, k]$, p. 47
ρ'	Denota $\rho N_s M_t$, p. 56
σ_H	Potência média das sub-portadoras, p. 42
σ_h	Potência média do canal, p. 38
σ_{ICI}	Potência média da ICI, p. 42
σ_w	Potência média do ruído, p. 47
$a[n, k]$	Símbolo transmitido na k -ésima sub-portadora, p. 31

$c[m, l; n', k]$	Coeficientes do filtro de Wiener, p. 45
$c[m, l; k]$	Coeficientes do filtro de Wiener para $n' = 0$, p. 57
$\bar{c}[m, l; k]$	Coeficientes do filtro descasado, p. 57
d_l	l -ésimo elemento da diagonal de \mathbf{D} , p. 47
f_d	Frequência Doppler máxima, p. 28
$g(\tau)$	Resposta ao impulso do filtro formatador de pulso, p. 29
g_{lk}	Denota $g(lT_s - \tau_k - \tau')$, p. 36
$h_{m,l}^n$	Igual a $h[(n-1)N_s + N_{cp} + m, l]$ para $0 \leq l \leq L-1$, e igual a 0 para $L \leq l \leq N_c - 1$, p. 35
$h(t, \tau)$	Resposta ao impulso do canal em banda básica, p. 23
$h[m, l]$	Resposta ao impulso do canal em tempo discreto, p. 30
$\bar{h}[n, l]$	Média conjunta de $h[m, l]$ dos instantes $m = nN_s + N_{cp}, \dots, (n+1)N_s - 1$, p. 62
$m_t(\nu)$	Denota $\text{sinc}^2(N_c\nu)/\text{sinc}^2(\nu)$, p. 39
$p_{B,i}(\nu)$	Espectro passa-baixa uniforme de largura $\nu_{d,i}$, p. 43
$p_t(\nu)$	Densidade espectral de potência normalizada de $\gamma_k(t)$, p. 30
$p_{t,1}(\nu)$	Densidade espectral de potência normalizada de $\gamma_k[m]$, p. 30
$p_{t,2}(\nu)$	Densidade espectral de potência normalizada de $\gamma_k[N_s m]$, p. 38
$p_{t,3}(\nu)$	Densidade espectral de potência normalizada de $\gamma_k[N_s M_t m]$, p. 48
$r_{\gamma_k}(\Delta t)$	Correlação de $\gamma_k(t)$, p. 28
$r_t(\Delta t)$	Correlação normalizada de $\gamma_k(t)$, p. 28
$s(\nu, \tau)$	Função de espalhamento Doppler, p. 23
$u[n, k]$	Interferência entre sub-portadoras sobre a k -ésima sub-portadora, p. 36
$w[n, k]$	Ruído sobre a k -ésima sub-portadora, p. 33
$x[n, k]$	Sinal recebido na k -ésima sub-portadora, p. 32
$z[n, k]$	Ruído sobre a estimativa LS de $H[n, k]$, p. 45
$B(\nu, f)$	Função bi-espalhamento, p. 24
$\mathbb{E}\{\cdot\}$	Operador esperança, p. 25
$H(t, f)$	Função de transferência do canal variável no tempo, p. 23
$H[n, k]$	Amplitude complexa da k -ésima sub-portadora, p. 36
$\tilde{H}[n, k]$	Estimativa LS de $H[n, k]$, p. 45

$\hat{H}[n, k]$	Estimativa MMSE de $H[n, k]$, p. 46
K	Número de percursos do canal, p. 28
K_{\max}	Dimensão adotada pelo algoritmo de ST, p. 80
L	Comprimento do canal em tempo discreto, p. 30
M	O filtro temporal FIR tem comprimento $2M + 1$, p. 50
M_f	Espaçamento das sub-portadoras piloto na frequência, p. 45
M_t	Espaçamento das sub-portadoras piloto no tempo, p. 45
N_c	Número de sub-portadoras, p. 31
N_{cp}	Comprimento do prefixo cíclico, p. 31
N_p	Número de sub-portadoras piloto por símbolo OFDM, p. 45
N_s	Comprimento do símbolo OFDM, p. 32
$P_J(\nu)$	Espectro de Jakes, p. 29
T_s	Período de amostragem, p. 29
$\mathbf{a}[n]$	Vetor contendo os símbolos transmitidos no n -ésimo símbolo OFDM, p. 31
$\mathbf{c}[l]$	Denota $\mathbf{c}[l; 0]$, p. 63
$\mathbf{c}[l; n']$	Coefficientes do filtro temporal FIR, p. 51
$\tilde{\mathbf{d}}[n]$	Denota $\mathbf{U}_s^H \tilde{\mathbf{H}}_p[n]$, p. 76
$\tilde{\mathbf{d}}[n; l]$	Denota $(\tilde{d}[n + M, l], \dots, \tilde{d}[n - M, l])^T$, p. 76
$\mathbf{r}[n]$	n -ésimo símbolo OFDM recebido, p. 32
$\mathbf{r}_f[k]$	Vetor de elementos $r_f[k - lM_f]$, para $l = 0, \dots, N_p - 1$, p. 47
\mathbf{r}_t	Denota $\mathbf{r}_t[0]$, p. 63
$\mathbf{r}_t[n']$	Vetor de elementos $r_{t,2}[n' - mM_t]$, para $m = -M, \dots, M$, p. 51
$\mathbf{s}[n]$	n -ésimo símbolo OFDM transmitido, p. 32
$\mathbf{x}[n]$	Vetor contendo o sinal recebido nas sub-portadoras do n -ésimo símbolo OFDM, p. 32
$\mathcal{C}(\mathbf{c})$	Matriz circulante formada a partir do vetor \mathbf{c} , p. 33
\mathbf{D}	Matriz diagonal dos auto-valores de \mathbf{R}_f , p. 47
\mathbf{F}	Matriz de Fourier normalizada, p. 31
$\mathbf{H}[n]$	Vetor contendo as amplitudes complexas das sub-portadoras, p. 36
$\mathbf{H}_p[n]$	Vetor de elementos $H[nM_t, kM_f]$, p. 65
$\tilde{\mathbf{H}}_p[n]$	Vetor de elementos $\tilde{H}[nM_t, kM_f]$, p. 65

- \mathbf{R}_f Matriz de correlação normalizada do vetor $\mathbf{H}_p[n]$, p. 47
- $\tilde{\mathbf{R}}_f$ Matriz de correlação do vetor $\tilde{\mathbf{H}}_p[n]$, p. 65
- \mathbf{R}_t Matriz de colunas $\mathbf{r}_t[mM_t]$, para $m = 0, \dots, 2M$, p. 51
- \mathbf{U} Matriz dos auto-vetores de \mathbf{R}_f , p. 47
- \mathbf{U}_s Matriz formada pelas colunas de \mathbf{U} relativas ao subespaço do sinal, p. 50
- \mathbf{U}_n Matriz formada pelas colunas de \mathbf{U} relativas ao subespaço do ruído, p. 66
- \mathbf{W} Matriz de Fourier, p. 31
- \mathbf{W}_τ Matriz cuja entrada de posição $k_1 k_2$ é $\exp(-j2\pi k_2(\tau_{k_1} + \tau'))/N_c T_s$, p. 36

1 Introdução

A crescente demanda por serviços de multimídia em sistemas de comunicação sem-fio tem requerido, cada vez mais, altas taxas de transmissão. Porém, com a largura de banda do sinal transmitido sendo maior que a banda de coerência do canal, podem ocorrer desvanecimentos profundos na frequência e interferência inter-simbólica (*Inter-Symbol Interference* – ISI). O OFDM (*Orthogonal Frequency Division Multiplexing*) foi proposto pensando em combater tais distorções do canal [1, 2, 3]. No OFDM, cada símbolo é transmitido em diferente sub-portadora. O OFDM é dito transformar um canal seletivo na frequência em um conjunto de sub-canais planos.

Nas últimas duas décadas, o OFDM tem sido usado numa variedade de aplicações. Quando aplicado em um ambiente com-fio, o OFDM é frequentemente chamado de DMT (*Discrete Multi-Tone*). O DMT é adotado no padrão ADSL (*Asymmetric Digital Subscriber Line*), que pode fornecer taxas de vários Mb/s da central telefônica ao assinante do serviço. O OFDM tem obtido sucesso também em várias aplicações sem-fio. É atualmente empregado em vários padrões de comunicações sem fio, tal como o DAB (*Digital Audio Broadcasting*) [4], o DVB-T (*Digital Video Broadcasting – Terrestrial*) [5]. E vários padrões de redes WLAN (*Wireless Local Area Network*), como o padrão europeu HIPERLAN2 (*High Performance Radio Local Area Network 2*) [6], e os padrões IEEE: 802.11a [7], 802.11g [8], e 802.16-2004 (WiMAX) [9]. Além disso, o OFDM é candidato a padrão de comunicações móveis de 4G [10] e a redes WPAN (*Wireless Personal Area Network*)— 802.15.3a [11].

A principal vantagem do OFDM está na sua simplicidade de implementação, que pode ser eficientemente realizada por FFT (*Fast Fourier Transform*); além de possuir fácil equalização, por eliminar qualquer interferência entre símbolos. As desvantagens de maior importância residem na perda de ortogonalidade entre as sub-portadoras, ou sub-canais, que leva à presença de ICI (*Inter-Carrier Interference*) [12], quando o canal é seletivo no tempo; e na necessidade de sincronismo, por exemplo, quando há um desvio entre as portadoras do transmissor e receptor [13], ou para determinar o início de um símbolo OFDM [14, 15]. O problema de sincronismo não será abordado nesta dissertação.

Será suposto sincronização perfeita.

A ortogonalidade entre as sub-portadoras ou sub-canais se deve à circularidade da matriz de canal, que simula uma convolução circular do canal. A propriedade de circularidade surge naturalmente com a inserção do CP (*Cyclic Prefix*), ao custo de uma perda de energia proporcional ao comprimento do CP [16]. Porém, as vantagens do uso do CP compensam qualquer perda de energia do sinal. Quando o canal varia temporalmente, a matriz de canal perde sua circularidade e as sub-portadoras passam a interferir entre si [12]. Como derivado na dissertação, a potência do canal se distribui entre a potência da sub-portadora e a potência da ICI. Esse fato importante permite, para determinado nível mínimo de SINR (*Signal-to-ICI plus Noise Ratio*), quantificar o grau máximo de variabilidade do canal, medido pela frequência Doppler máxima que o sistema pode operar.

Os símbolos transmitidos nas sub-portadoras podem ser facilmente recuperados por meio de detecção coerente ou não-coerente. Na detecção coerente, símbolos de referência, conhecidos no receptor, são transmitidos nas sub-portadoras piloto. O receptor estima então o canal sobre as posições piloto. As sub-portadoras restantes podem ser estimadas por diversas técnicas de interpolação [17, 18]. Já na detecção não-coerente não há necessidade de símbolos de referência. A informação é transmitida como a diferença entre dois símbolos sucessivos. O receptor pode comparar dois símbolos adjacentes ou no tempo ou na frequência. Sem a estimação do canal, o sistema OFDM precisa adotar a modulação DPSK (*Differential Phase-Shift Keying*), que tem uma perda de SNR (*Signal-to-Noise Ratio*) de 3 dB se comparada à modulação PSK (*Phase-Shift Keying*) [19]. Para que se tenha melhor desempenho do sistema OFDM, a estimação do canal é necessária. Algoritmos de estimação de canal mais precisos podem ser aplicados ao sistema OFDM de forma a permitir detecção coerente, e portanto melhorar a performance do sistema. Além disso, certas técnicas de modulação, como a modulação espaço-temporal de Alamouti [20] por exemplo, também requerem o conhecimento do canal.

Os algoritmos de estimação de canal propostos em [21, 22, 23, 24, 25, 26] são baseados em treinamento. A idéia principal desses algoritmos é explorar as correlações do canal OFDM. Portanto, esses algoritmos exigem que as estatísticas do canal sejam conhecidas. A seguir, para efeito de contextualização, é dado um breve resumo desses artigos.

Em [21], são propostos dois algoritmos de estimação, o algoritmo MMSE (*Minimum Mean Square Error*) [27] e o algoritmo LS (*Least Square*) [27]. O algoritmo MMSE usa somente as correlações do canal no domínio da frequência (i.e, a correlação entre as sub-portadoras de um mesmo símbolo OFDM). A solução LS se reduz ao estimador *zero-*

forcing. O algoritmo MMSE tem performance melhor que a do algoritmo LS ao custo de maior complexidade. Adicionalmente, o algoritmo MMSE requer o conhecimento das correlações do canal e da variância do ruído. Já o algoritmo LS não necessita de qualquer conhecimento do canal. Beek [21] também toma proveito do fato de o canal ter resposta finita de modo a simplificar os algoritmos MMSE e LS propostos.

Edfors [22], baseado na teoria da redução de posto ótima [28] aplicada ao estimador LMMSE (*Linear Minimum Mean Square Error*), apresentou um algoritmo de estimação de posto menor, que explora somente as correlações no domínio da frequência. Embora o algoritmo de estimação proposto exija o conhecimento das correlações do canal e a SNR, sua performance é robusta a mudanças nas correlações do canal e SNR. Há um limite inferior para a performance do estimador de posto menor, devido a ainda existir ruído sobre o sub-espço do canal. Sendo menor o posto, menor é a complexidade do algoritmo.

Li [23, 29] propôs um algoritmo de estimação em que as estimativas LS de sucessivos símbolos OFDM são combinadas de modo ótimo conforme o critério MMSE. Baseado na suposição de que as correlações do canal podem ser escritas como o produto entre a correlação no domínio do tempo e a correlação no domínio da frequência, o algoritmo proposto é capaz de explorar as correlações do canal tanto no domínio do tempo como na frequência. O estimador MMSE proposto primeiro explora as correlações no domínio da frequência, e depois explora as correlações no domínio do tempo. O algoritmo requer informações sobre as estatísticas do canal e a SNR. Também é proposta uma versão robusta do algoritmo MMSE, em que o algoritmo robusto é derivado a partir das correlações que resultam em pior MSE (*Mean Square Error*). Contudo, a performance degrada bastante se a frequência Doppler e os espalhamentos de atrasos aplicados ao algoritmo MMSE ou sua versão robusta são menores que os do canal verdadeiro.

Em [24, 30], baseado no modelo paramétrico do canal TDL (*Tapped Delay Line*), mostra-se que o canal nas posições piloto pode ser decomposto no chamado subespaço de atrasos, cuja dimensão é igual ao número de percursos do canal. Devido à variação mais lenta dos atrasos dos percursos, o subespaço pode ser eficientemente estimado por um algoritmo ST (*Subspace Tracking*). Depois, o ruído sobre as componentes da projeção sobre o subespaço de atrasos é parcialmente eliminado pelo LMS (*Least Mean Square*). A combinação do LORAF (*Low-Rank Adaptive Filter*), o algoritmo ST empregado, mais o LMS recebe o nome de SAT (*Subspace Amplitude Tracking*). O algoritmo LMS exposto em [24], como mostrado em [31], é na verdade um filtro passa-baixa. Em [31], o LMS é substituído por um filtro com largura igual à frequência Doppler máxima, resultando em

performance consideravelmente superior. No lugar da suposição de que o canal obedece o modelo TDL, o subespaço de atrasos poderia ser derivado através da matriz de auto-correlação do canal na frequência, como encontrada por Li [23].

O canal pode ter ainda suas correlações temporais exploradas por um filtro de Kalman [25, 26]. O principal problema proveniente da abordagem por Kalman reside na alta complexidade computacional exigida. Também é necessário supor que o canal pode ser modelado por uma estrutura AR (*Auto-Regressive*), cujos coeficientes precisam ser estimados. Em Zhang [26], os coeficientes da estrutura AR aproximam o espectro de Jakes, que supostamente é obedecido pelo canal. Quando são desconhecidos, os coeficientes podem ser encontrados pelo método de Yule-Walker [32], a partir das estimativas da correlação do canal. Já Cai [25] estima os parâmetros da estrutura AR através de um algoritmo baseado no critério H_∞ . Em ambos os artigos é apresentado como as correlações do canal na frequência são exploradas, mas não é discutido como deve ser o procedimento na prática, visto que a relação com o filtro de Kalman proposto pode levar a maior ou menor perda de desempenho.

1.1 Contribuições desta dissertação

Quando o canal não é seletivo no tempo, as sub-portadoras consistem na DFT (*Discrete Fourier Transform*) do canal no domínio do tempo. Porém, isso deixa de ocorrer quando o canal varia temporalmente. No caso, as sub-portadoras consistem na DFT da média conjunta de N_c amostras do canal no tempo. N_c é o número de sub-portadoras empregadas no sistema OFDM. Tal fato tem diversas conseqüências. Se a média do canal é nula, o símbolo OFDM não deve ser extenso, pois a média conjunta do canal aproximaria zero. Além disso, as correlações do canal na frequência devem incluir algumas modificações. Outro efeito é que a potência da média conjunta do canal é menor que a potência do canal. Como conseqüência, as sub-portadoras experimentam potência menor. A potência restante aparece como ICI. Como será visto mais adiante na dissertação, é mostrado que a potência recebida do canal se divide entre a potência da sub-portadora e a potência da ICI, apenas com a suposição de que o canal obedece o modelo TDL e os símbolos de cada sub-portadora têm mesma potência.

Também é derivado um estimador MMSE capaz de explorar as correlações do canal tanto no tempo como na frequência. Em [23], o estimador MMSE é encontrado a partir da disposição em bloco das sub-portadoras piloto, que não permite a transmissão de símbolos

de dados. Já em [29], o estimador MMSE derivado considera uma distribuição das sub-portadoras mais geral. Porém, não fica claro uma possível separação entre as estimativas somente sobre as sub-portadoras piloto e o processo de interpolação. O estimador MMSE derivado mais adiante é baseado na disposição em *grid* das sub-portadoras piloto. No procedimento aplicado para o estimador IIR (*Infinite Impulse Response*) é explicitado a separação entre as estimativas somente sobre as sub-portadoras piloto e o processo de interpolação, seja no tempo como na frequência. E, portanto, podemos nos focar somente nas estimativas das sub-portadoras piloto. O procedimento de interpolação sendo realizado por qualquer outro método, não necessariamente o encontrado nesta dissertação.

O estimador MMSE requer que as correlações do canal e a variância do ruído sejam conhecidas. Essa problemática pode ser contornada pela aplicação de uma versão robusta do estimador MMSE ou pelo uso de estruturas adaptativas. O algoritmo robusto é derivado a partir das correlações que resultam em pior MSE, dadas certas restrições. Como as restrições são suficientemente “fortes”, o pior MSE é pequeno e próximo ao MMSE. Em [23], as restrições consideradas são: 1) a densidade espectral de potência ter suporte limitado pela frequência Doppler máxima, e 2) a potência do canal ser unitária. Assim, Li [23] não leva em consideração o efeito da ICI. O estimador robusto proposto nesta dissertação inclui 3) o nível de ICI como restrição. É necessário conhecer a potência da ICI atuante, assim como a frequência Doppler máxima. Com mais essa restrição, o pior MSE torna-se ainda mais próximo do MMSE.

O subespaço de atrasos é estimado pelos algoritmos LORAF [33] e OPAST (*Orthogonal Projection Approximation Subspace Tracking*) [34, 35]. O LORAF é derivado a partir do método *simultaneous orthogonal iteration*. Já o OPAST baseia-se no truncamento, até segunda ordem, da função-custo do critério LS. Enquanto no LORAF as colunas da matriz de subespaço aproximam os auto-vetores de interesse, no OPAST a matriz de subespaço aproxima apenas o subespaço correspondente aos auto-vetores de interesse. Tal fato impossibilita que no OPAST se estime a dimensão do subespaço de atrasos. Porém, os dois algoritmos permitem que a variância da ICI mais ruído seja estimada pelo método proposto. O algoritmo adaptativo que explora as correlações temporais do canal evita a necessidade de estimação dos coeficientes do modelo AR do canal, como na abordagem por filtro de Kalman. A solução MMSE resultante [ver a equação (4.34)] fornece que os coeficientes dos filtros que exploram as correlações temporais do canal são dados em função 1) da variância da ICI mais ruído e 2) da inversa da matriz de correlação das componentes do subespaço de atrasos. A identidade de Woodbury permite que tal inversa seja calculada recursivamente. A variância é estimada pelo método proposto a partir dos

algoritmos ST. Com isso, obtém-se um algoritmo adaptativo capaz de atenuar o ruído nas componentes do subespaço de atrasos. Contudo, esse algoritmo apresentou problemas de instabilidade, com divergência explosiva, quando opera em conjunto com os algoritmos ST. A solução que contorna tal comportamento baseia-se em decomposição QR, o que o torna numericamente estável. O algoritmo baseado em decomposição QR suporta uma versão rápida da ordem do comprimento do filtro empregado.

Em suma, destacamos a seguir as principais contribuições desta dissertação:

- Análise dos canais variantes no tempo em sistemas de modulação OFDM, levando em consideração a presença da ICI. Derivação de uma fórmula para a potência das sub-portadoras e da ICI.
- Derivação de um estimador MMSE capaz de explorar as correlações do canal tanto no tempo como na frequência, para uma disposição em *grid* das sub-portadoras piloto. Foi proposto um estimador robusto, que não requer o conhecimento das correlações entre as sub-portadoras, mas supõe serem conhecidas a frequência Doppler máxima, e a potência do canal e da ICI.
- Aplicação dos algoritmos LORAF e OPAST na estimação do subespaço de atrasos, em conjunto com a solução robusta para os filtros que exploram as correlações temporais do canal, ou em conjunto com o algoritmo adaptativo proposto, que é baseado em decomposição QR.

1.2 Organização

O restante da dissertação é organizada como segue. No capítulo 2 são apresentados os modelos empregados, tanto de canal como do sistema de modulação OFDM. Também é descrito o efeito que tem a variação do canal no sistema OFDM, sendo daí derivada a variância da ICI. No capítulo 3 é realizado todo o processo de derivação do estimador MMSE e de sua versão robusta. O capítulo 4 apresenta as estruturas adaptativas empregadas. Deriva-se, por questão de auto-suficiência, os algoritmos LORAF e OPAST. Mostra-se como o algoritmo baseado em decomposição QR é obtido. As simulações computacionais são apresentadas no capítulo 5. Por fim, o capítulo 6 apresenta as conclusões e perspectivas de continuação desta dissertação.

2 Descrição e Modelagem

Neste capítulo são apresentados os modelos e descrições necessários a uma compreensão inicial do sistema de modulação OFDM. Começamos com a descrição do canal linear com desvanecimento, seja seletivo na frequência como no tempo. A aleatoriedade do canal é caracterizada pelo modelo WSS-US (*Wide Sense Stationary–Uncorrelated Scattering*). Depois é apresentado o modelo de canal TDL, bastante empregado na descrição dos canais de comunicação sem-fio. As correlações das amplitudes dos atrasos são caracterizadas pelo espectro de Jakes. É dada a descrição do sistema de modulação OFDM e os efeitos decorrentes da variação temporal do canal. As correlações entre as sub-portadoras são analisadas no contexto do canal TDL. Por fim, com a suposição de que os símbolos transmitidos tem igual potência, mostra-se que a perda de potência experimentada por cada sub-portadora é a mesma e aparece como a potência da ICI.

2.1 Canal com Desvanecimento

Ao atravessar o meio físico que liga o transmissor ao receptor, o sinal sofre distorções de diversas naturezas. Para os interesses desta dissertação, levaremos em conta o espalhamento no tempo, responsável pela ISI; o espalhamento na frequência, um efeito da variação do canal no tempo; e a adição de ruído no receptor.

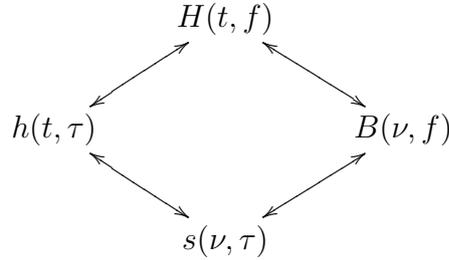
Seja $h(t, \tau)$, em banda-básica, a resposta do canal ao impulso no instante t . Dado o sinal transmitido em banda-básica $x(t)$, o sinal recebido é dado por

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t, \tau)x(t - \tau)d\tau + \eta(t), \quad (2.1)$$

em que $\eta(t)$ é o ruído aditivo no transmissor, geralmente branco e gaussiano.

É útil considerar a resposta do canal levando em conta suas transformadas de Fourier. O tempo t corresponde à frequência Doppler ν , enquanto o atraso τ é levado na frequência f . A transformação $\tau \rightarrow f$ resulta na *função de transferência variável no tempo* $H(t, f)$. Realizando a transformação $t \rightarrow \nu$, temos a *função de espalhamento Doppler* $s(\nu, \tau)$,

ou simplesmente *função de espalhamento*. Por fim, a *função bi-espalhamento* $B(\nu, f)$ é definida como a transformada de Fourier de $h(t, \tau)$ com relação a t e τ . O diagrama abaixo relaciona as diferentes transformações da resposta do canal variante no tempo.



Vamos agora derivar uma relação entre os sinais de entrada $X(f)$ e saída $Y(f)$ no domínio da frequência, diferentemente da equação (2.1) que nos dá uma relação no domínio do tempo. Substituindo $h(t, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\nu, \tau) \exp(j2\pi\nu t) d\nu$ na equação (2.1), temos, não considerando o ruído,

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} s(\nu, \tau) x(t - \tau) \exp(j2\pi\nu t) d\nu d\tau.$$

Agora, aplicando a transformada de Fourier, podemos escrever

$$\begin{aligned} Y(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} x(t - \tau) \exp(-j2\pi(f - \nu)t) dt \right\} s(\nu, \tau) d\nu d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \{ X(f - \nu) \exp(-j2\pi(f - \nu)\tau) \} s(\nu, \tau) d\nu d\tau, \end{aligned}$$

e então

$$Y(f) = \int_{-\infty}^{\infty} B(\nu, f - \nu) X(f - \nu) d\nu. \quad (2.2)$$

Num canal linear invariante no tempo $h(\tau)$, de função de transferência $H(f)$, teríamos $Y(f) = H(f)X(f)$. Neste caso, o canal simplesmente atenua as componentes de frequência f . Já num canal variante no tempo, como nos mostra a equação (2.2), o espectro do sinal de saída $Y(f)$ é a convolução da função bi-espalhamento $B(\nu, f - \nu)$ com o sinal de entrada $X(f)$. A componente espectral f sofre interferência das componentes vizinhas $f - \nu$ por um fator de $B(\nu, f - \nu)$. No sistema OFDM, a variação temporal do canal é responsável pela ICI.

É possível escrever a equação que relaciona o sinal de entrada e saída somente usando a função de transferência $H(t, f)$ ou a função de espalhamento $s(\nu, \tau)$. Porém, essas equações não nos serão úteis, nem nos darão uma compreensão mais aprofundada dos canais variantes no tempo. As duas funções terão papel importante na caracterização

estatística do canal variante no tempo, mais explicitamente, no cálculo de suas correlações, como determinaremos a seguir.

2.1.1 Canal WSS-US

Por não conhecermos a dinâmica de variação do canal deterministicamente, damos a $h(t, \tau)$ um tratamento estatístico, portanto considerando $h(t, \tau)$ como um processo aleatório. O comportamento estatístico do canal não é totalmente irrestrito. Uma suposição que é geralmente considerada na prática é que o canal é estacionário em sentido amplo em relação ao tempo t e descorrelacionado para diferentes atrasos τ . Por um processo estacionário em sentido amplo, entendemos como aquele cuja correlação entre os instantes t_1 e t_2 depende apenas de $t_2 - t_1$. Devido a essas propriedades, o canal é chamado WSS-US. Antes de caracterizarmos o canal WSS-US através de sua função de correlação, apresentamos e provamos a seguinte propriedade simples.

Propriedade. Um processo aleatório é estacionário em sentido amplo se, e somente se, suas componentes espectrais são descorrelacionadas.

Prova. Seja $H(f)$ a transformada de Fourier do processo $h(t)$ em questão. Temos

$$\begin{aligned} R_h(t_1, t_2) &= \mathbb{E}\{h^*(t_1)h(t_2)\} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{E}\{H^*(f_1)H(f_2)\} \exp(j2\pi(f_2t_2 - f_1t_1)) df_1 df_2, \end{aligned} \quad (2.3)$$

em que $\mathbb{E}\{\cdot\}$ é o operador esperança. Supondo que as componentes espectrais são descorrelacionadas, podemos escrever

$$\mathbb{E}\{H^*(f_1)H(f_2)\} = S_H(f_1)\delta(f_2 - f_1).$$

Deste modo, a equação (2.3) se simplifica como

$$R_h(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} S_H(f_1) \exp(j2\pi f_1(t_2 - t_1)) df_1,$$

e, portanto, $R_h(t_1, t_2)$ é uma função de $\Delta t = t_2 - t_1$ somente. Por outro lado, temos

$$\begin{aligned} S_H(f_1, f_2) &= \mathbb{E}\{H^*(f_1)H(f_2)\} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{E}\{h^*(t_1)h(t_2)\} \exp(-j2\pi(f_2t_2 - f_1t_1)) dt_1 dt_2 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-j2\pi(f_2 - f_1)t_1) dt_1 \int_{-\infty}^{\infty} R_h(t_1, t_1 + \Delta t) \exp(-j2\pi f_2 \Delta t) d\Delta t. \end{aligned}$$

Vemos acima que a segunda integral não depende de t_1 , se $R_h(t_1, t_2)$ depende apenas de Δt ; e a primeira é igual a $\delta(f_2 - f_1)$. Portanto, $\mathbb{E}\{H^*(f_1)H(f_2)\} = 0$ para $f_1 \neq f_2$. \square

Como $h(t, \tau)$ é descorrelacionado para diferentes atrasos τ , a propriedade acima nos diz que função de transferência $H(t, f)$ é WSS (*Wide Sense Stationary*) em relação ao parâmetro de frequência f . Também devido à propriedade, o canal ser WSS em relação ao tempo t implica que a função de espalhamento Doppler $s(\nu, \tau)$ é descorrelacionada para diferentes frequências Doppler ν .

Definimos as seguintes funções de correlação

$$\begin{aligned} R_h(t, t'; \tau, \tau') &= \mathbb{E}\{h^*(t, \tau)h(t', \tau')\} & R_s(\nu, \nu'; \tau, \tau') &= \mathbb{E}\{s^*(\nu, \tau)s(\nu', \tau')\} \\ R_H(t, t'; f, f') &= \mathbb{E}\{H^*(t, f)H(t', f')\} & R_B(\nu, \nu'; f, f') &= \mathbb{E}\{B^*(\nu, f)B(\nu', f')\}. \end{aligned}$$

Com a suposição de que o canal é WSS-US e pelas observações acima, podemos então escrever

$$\begin{aligned} R_h(t, t + \Delta t; \tau, \tau') &= \delta(\tau - \tau')P_h(\Delta t, \tau) \\ R_H(t, t + \Delta t; f, f + \Delta f) &= R_H(\Delta t, \Delta f) \\ R_s(\nu, \nu'; \tau, \tau') &= \delta(\nu - \nu')\delta(\tau - \tau')P_s(\nu, \tau) \\ R_B(\nu, \nu'; f, f + \Delta f) &= \delta(\nu - \nu')P_B(\nu, \Delta f), \end{aligned}$$

em que $R_H(\Delta t, \Delta f)$ é a *função de correlação tempo-freqüência* e $P_s(\nu, \tau)$ é a *função de espalhamento*. Essas correlações se relacionam por meio da transformada de Fourier como

$$\begin{array}{ccc} R_H(\Delta t, \Delta f) & \xrightarrow{\mathcal{F}_{\Delta t}} & P_B(\nu, \Delta f) \\ \uparrow \mathcal{F}_\tau & \nearrow \mathcal{F}_{\Delta t, \tau} & \uparrow \mathcal{F}_\tau \\ P_h(\Delta t, \tau) & \xrightarrow{\mathcal{F}_{\Delta t}} & P_s(\nu, \tau) \end{array}$$

o que pode ser verificado facilmente pela definição dessas funções.

As seguintes funções

$$\begin{aligned} R_f(\Delta f) &= R_H(0, \Delta f) \\ R_t(\Delta t) &= R_H(\Delta t, 0), \end{aligned}$$

que chamamos de *correlação da freqüência* e *correlação temporal*, respectivamente, caracterizam o quanto o canal varia ou na freqüência ou no tempo. Dois parâmetros bastante

usados, que condensam o comportamento do canal, são o *tempo de coerência* T_c e a *banda de coerência* B_c , dados como os menores valores de Δt e Δf tais que $R_t(\Delta t) < 0.5$ e $R_f(\Delta f) < 0.5$, respectivamente. Se a largura de banda do sinal transmitido é maior que a banda de coerência, o canal é dito ser *seletivo em frequência*. Quando o sinal transmitido tem largura de banda menor que a banda de coerência, o canal é classificado como *plano*. Já o tempo de coerência indica o quão rápido o canal varia temporalmente. Quando o período de símbolo é maior que o tempo de coerência, o canal possui *desvanecimento rápido*. Se o tempo de coerência é muito maior que período de símbolo, temos canais de *desvanecimento lento*.

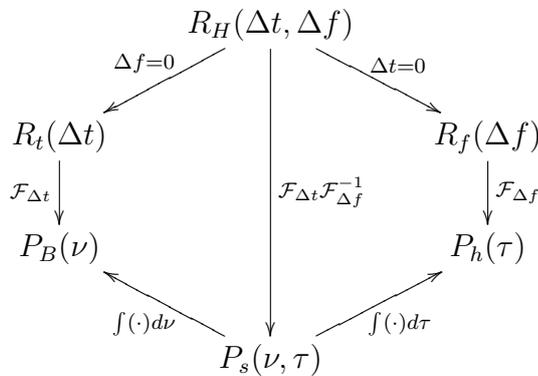
Por outro lado, definimos o *perfil de potência do atraso* e o *espectro Doppler*, respectivamente, como

$$P_h(\tau) = P_h(0, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} P_s(\nu, \tau) d\nu$$

$$P_B(\nu) = P_B(\nu, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} P_s(\nu, \tau) d\tau,$$

que indicam a potência dos atrasos e das frequências Doppler.

Essas funções se relacionam como no diagrama abaixo.



2.1.2 Canal TDL-Jakes

Agora especificamos o canal WSS-US em modelagem mais simples, mas bastante próxima ao que se observa em muitos cenários práticos. Na descrição de canais sem-fio é comumente usado o modelo TDL. O sinal transmitido, ao atravessar o meio físico, sofre reflexões nos objetos que cercam transmissor e receptor. Portanto, chegam ao receptor diversas réplicas atrasadas do sinal transmitido, cada qual atenuadas por certo fator complexo. Os atrasos são considerados quase constantes, de variação temporal bastante lenta. Já as atenuações complexas, devido à mobilidade do transmissor ou dos objetos

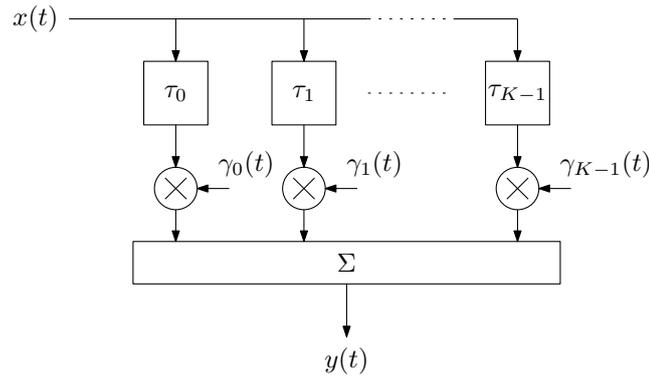


Figura 2.1: Modelo de canal TDL.

circundantes, apresentam variação temporal mais rápida. O canal TDL tem resposta ao impulso na forma

$$\tilde{h}(t, \tau) = \sum_{k=0}^{K-1} \gamma_k(t) \delta(\tau - \tau_k), \quad (2.4)$$

em que \$\gamma_k(t)\$ e \$\tau_k\$ são a atenuação complexa e o atraso do \$k\$-ésimo percurso, respectivamente. A figura 2.1 ilustra o canal sem fio que consideramos, modelado como um canal TDL. É suposto que o número de percursos \$K\$ é constante.

A suposição de que \$\tilde{h}(t, \tau)\$ é WSS-US implica

$$\mathbb{E}\{\gamma_k(t)\gamma_{k'}(t)\} = 0, \quad \text{para } k \neq k',$$

i.e., as atenuações complexas de diferentes percursos são descorrelacionadas. Por outro lado, temos

$$\begin{aligned} r_{\gamma_k}(\Delta t) &= \mathbb{E}\{\gamma_k^*(t)\gamma_k(t + \Delta t)\} \\ &= \rho(\tau_k)r_t(\Delta t), \end{aligned}$$

em que \$\rho(\tau_k)\$ é a potência média do \$k\$-ésimo percurso e \$r_t(\Delta t)\$ é a correlação normalizada de \$\gamma_k(t)\$.

Com o canal obedecendo o modelo de Jakes, temos [36]

$$r_t(\Delta t) = J_0(2\pi f_d \Delta t) \quad (2.5)$$

$$\rho(\tau) = \frac{1}{\tau_{\max}} \exp(-\tau/\tau_{\max}), \quad (2.6)$$

em que \$J_0\$ é a função de Bessel do primeiro tipo de ordem zero, \$f_d\$ é a frequência Doppler máxima, e \$\tau_{\max}\$ é o espalhamento de atraso máximo. Como nos indica o perfil de potência do atraso \$\rho(\tau)\$, maior o atraso do percurso, menor é a potência do percurso,

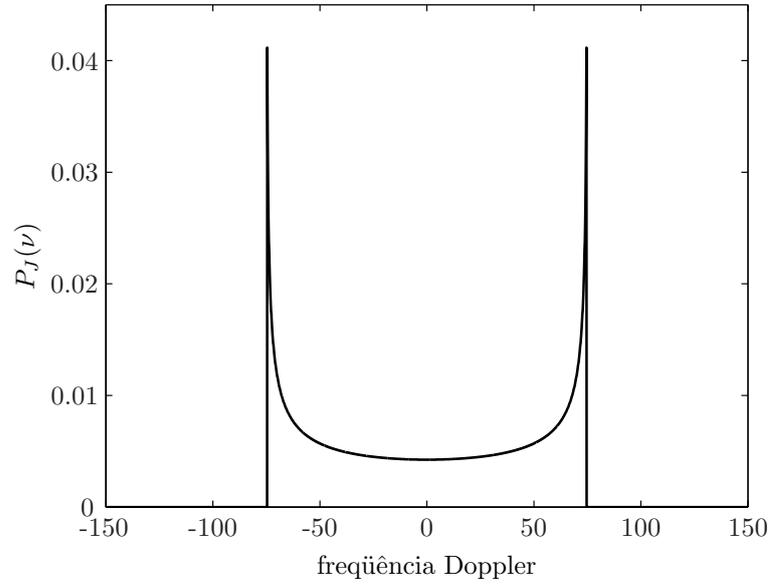


Figura 2.2: Espectro de Jakes com $f_d = 75$ Hz.

com decaimento exponencial. A densidade espectral de potência normalizada de $\gamma_k(t)$, que chamamos de *espectro de Jakes*, i.e., a transformada de Fourier de $r_t(\Delta t)$, é dada por

$$P_J(\nu) = \begin{cases} \frac{1}{\pi f_d} \frac{1}{\sqrt{1 - (\nu/f_d)^2}}, & \text{para } |\nu| < f_d, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

O frequência Doppler máxima f_d nos diz o quanto o canal varia temporalmente. Maior é o valor de f_d , mais rapidamente o canal varia no tempo. O parâmetro f_d nos será útil quando formos verificar a performance dos algoritmos de estimação em relação à variação temporal do canal. O espectro de Jakes é ilustrado na figura 2.2.

Como estamos trabalhando com sistemas de comunicação digital, falta inserir na equação (2.4) os filtros formatadores de pulso $g_T(\tau)$ e $g_R(\tau)$ do transmissor e receptor, respectivamente. Sendo $g(\tau) = g_T(\tau) * g_R(\tau)$ a combinação em série desses filtros, temos

$$h(t, \tau) = \sum_{k=0}^{K-1} \gamma_k(t) g(\tau - \tau_k).$$

Adotando o período de amostragem T_s , definimos a resposta do canal em tempo discreto como

$$\begin{aligned} h[m, l] &= h(mT_s, lT_s) \\ &= \sum_{k=0}^{K-1} \gamma_k[m] g(lT_s - \tau_k - \tau'), \end{aligned} \quad (2.7)$$

onde $\gamma_k[m] = \gamma_k(mT_s)$ e τ' foi inserido de modo a termos $h[m, l]$ causal, com $h[m, l] = 0$ para $l \neq 0, \dots, L - 1$. De fato, se algum atraso não satisfaz $\tau_k = mT_s$ para algum $m \in \mathbb{Z}$, não podemos supor que canal é causal, nem que o comprimento do canal L é finito. A hipótese de que $h[m, l] = 0$, para $l \neq 0, \dots, L - 1$, significa que $h[m, l]$ é suficientemente pequeno e pode ser considerado igual a zero.

Por trabalharmos de agora em diante com tempo discreto, temos de relacionar a correlação $r_t(\Delta t)$ e o respectivo espectro $p_t(\nu)$ com suas versões em tempo discreto. Portanto, definimos

$$\begin{aligned} r_{\gamma_k}[m] &= \mathbb{E}\{\gamma_k^*[m']\gamma_k[m' + m]\} \\ &= \rho(\tau_k)r_{t,1}[m], \end{aligned}$$

em que

$$r_{t,1}[m] = r_t(mT_s).$$

Definimos a transformada de Fourier discreta de $r_{t,1}[m]$ como

$$p_{t,1}(\nu) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} r_{t,1}[m] \exp(-j2\pi m\nu).$$

Temos a seguinte relação [37]:

$$p_{t,1}(\nu) = \frac{1}{T_s} p_t\left(\frac{\nu}{T_s}\right), \quad \text{para } -1/2 \leq \nu \leq 1/2.$$

Se $p_t(\nu)$ tem suporte $[-f_d, f_d]$, como no caso do espectro de Jakes, segue então que $p_{t,1}(\nu)$ é limitado a $[-\nu_{d,1}, \nu_{d,1}]$, em que $\nu_{d,1} = f_d T_s$.

2.2 Descrição do Sistema de Modulação OFDM

Um sistema de modulação OFDM consiste basicamente de um processo de modulação no transmissor e demodulação no receptor que torna um canal seletivo em frequência em vários sub-canais planos e ortogonais, pelos quais os sub-símbolos são transmitidos. Dizemos que os sub-canais são ortogonais quando um não interfere nos outros. Como veremos a seguir, perde-se a ortogonalidade quando há variação temporal do canal. No OFDM, inicialmente, os sub-símbolos no domínio da frequência são mapeados para o domínio do tempo por meio da aplicação de uma IDFT (*Inverse Discrete Fourier Transform*) normalizada. Depois, para que não ocorra interferência entre símbolos OFDM, é inserido um CP de comprimento maior que o espalhamento de atraso máximo do canal. O sinal é

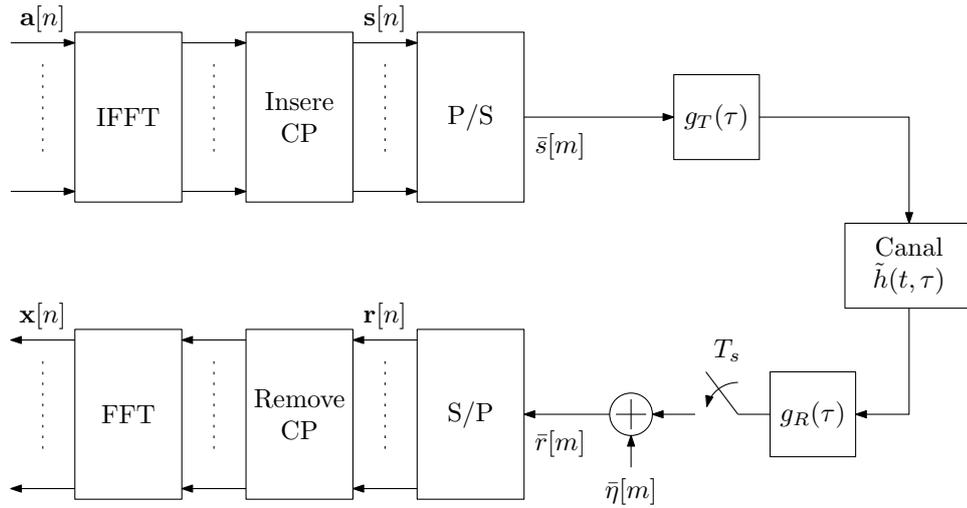


Figura 2.3: Sistema OFDM.

então transmitido, sofrendo distorção causada pelo canal. No receptor, o CP é removido, seguido da aplicação de uma DFT que translada o sinal recebido do domínio do tempo para a frequência. Na prática, as IDFT e DFT são substituídas por suas versões rápidas, que são as IFFT (*Inverse Fast Fourier Transform*) e FFT, respectivamente. A figura 2.3 ilustra o modelo em banda-básica de um sistema de modulação OFDM.

Inicialmente, por simplicidade de apresentação, consideraremos que o canal não varia temporalmente, i.e, $h[m, l] = h[l]$.

Seja $\mathbf{a}[n] = (a[n, 0], a[n, 1], \dots, a[n, N_c - 1])^T$ o vetor contendo os sub-símbolos no domínio da frequência, alocados nas N_c sub-portadoras do n -ésimo símbolo OFDM. O símbolo OFDM é constituído da versão de $\mathbf{a}[n]$ no domínio do tempo, que é obtida pela aplicação de uma IDFT normalizada, adicionada de seu CP. Seja \mathbf{W} a *matriz de Fourier* dada por

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} \omega_{N_c}^{00} & \omega_{N_c}^{01} & \dots & \omega_{N_c}^{0(N_c-1)} \\ \omega_{N_c}^{10} & \omega_{N_c}^{11} & \dots & \omega_{N_c}^{1(N_c-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_{N_c}^{(N_c-1)0} & \omega_{N_c}^{(N_c-1)1} & \dots & \omega_{N_c}^{(N_c-1)(N_c-1)} \end{pmatrix},$$

em que $\omega_{N_c} = \exp(-j2\pi/N_c)$. Também definimos a *matriz de Fourier normalizada* como $\mathbf{F} = \frac{1}{\sqrt{N_c}} \mathbf{W}$. A adição do CP é dada pela aplicação da matriz

$$\mathbf{\Theta} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{N_{cp} \times (N_c - N_{cp})} & \mathbf{I}_{N_{cp}} \\ & \mathbf{I}_{N_c} \end{pmatrix},$$

cujos resultado é copiar para o topo os últimos N_{cp} elementos do vetor em que é aplicada.

Obtemos o seguinte símbolo OFDM, de comprimento $N_s = N_c + N_{cp}$,

$$\mathbf{s}[n] = \mathbf{\Theta} \mathbf{F}^H \mathbf{a}[n], \quad (2.8)$$

que possui o elemento $s[n, k]$ em sua k -ésima posição. Cada vetor $\mathbf{s}[n]$ é serializado, resultando no sinal transmitido $\bar{s}[m] = s[\lfloor m/N_s \rfloor, (m)_{N_s}]$, em que $(\cdot)_{N_s}$ e $\lfloor \cdot \rfloor$ são o operador módulo e o operador “maior inteiro menor ou igual a”, respectivamente.

Com um ruído aditivo, branco, gaussiano e circularmente simétrico $\bar{\eta}[m]$, no receptor, o sinal recebido é dado por

$$\bar{r}[m] = \sum_{l=0}^{L-1} h[l] \bar{s}[m-l] + \bar{\eta}[m]. \quad (2.9)$$

Seja $\mathbf{r}[n] = (\bar{r}[nN_s], \dots, \bar{r}[nN_s + N_s - 1])^T$ a versão paralelizada do sinal recebido $\bar{r}[m]$. O CP é removido pela aplicação à $\mathbf{r}[n]$ da matriz

$$\mathbf{\Theta}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{N_c \times N_{cp}} & \mathbf{I}_{N_c} \end{pmatrix}.$$

Posteriormente, aplica-se a DFT normalizada, e obtemos finalmente o símbolo OFDM decodificado

$$\mathbf{x}[n] = (x[n, 0], \dots, x[n, N_c - 1])^T = \mathbf{F} \mathbf{\Theta}^{-1} \mathbf{r}[n].$$

Seja agora $\boldsymbol{\eta}[n] = (\bar{\eta}[nN_s], \dots, \bar{\eta}[nN_s + N_s - 1])^T$ a versão paralelizada do ruído $\bar{\eta}[m]$. Com a organização de $\bar{r}[m]$, $\bar{s}[m]$ e $\bar{\eta}[m]$ nos vetores $\mathbf{r}[n]$, $\mathbf{s}[n]$ e $\boldsymbol{\eta}[n]$, respectivamente, a equação (2.9) é reescrita como

$$\mathbf{r}[n] = \mathbf{H}_0 \mathbf{s}[n] + \mathbf{H}_1 \mathbf{s}[n-1] + \boldsymbol{\eta}[n], \quad (2.10)$$

em que

$$\mathbf{H}_0 = \begin{pmatrix} h[0] & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ h[1] & h[0] & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ h[2] & h[1] & h[0] & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & h[0] & \vdots & \cdots & \vdots \\ h[L-1] & h[L-2] & h[L-3] & \cdots & \ddots & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & h[L-1] & \cdots & h[0] \end{pmatrix}$$

e

$$\mathbf{H}_1 = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & h[L-1] & \cdots & h[1] \\ \vdots & \ddots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \vdots & \cdots & h[L-1] \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Definindo a matriz circulante $\mathcal{C}(\mathbf{c})$ em função do vetor $\mathbf{c} = (c_0, \dots, c_{N-1})^T$ como

$$\mathcal{C}(\mathbf{c}) = \begin{pmatrix} c_0 & c_{N-1} & \cdots & c_2 & c_1 \\ c_1 & c_0 & \cdots & c_3 & c_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ c_{N-1} & c_{N-2} & \cdots & c_1 & c_0 \end{pmatrix},$$

temos que a imposição $L \leq N_{\text{cp}} + 1$ resulta em

$$\mathbf{\Theta}^{-1} \mathbf{H}_0 \mathbf{\Theta} = \mathcal{C}(\mathbf{h}^0) \quad (2.11)$$

em que $\mathbf{h}^0 = (h[0], \dots, h[L-1], 0, \dots, 0)$ tem dimensão $N_c \times 1$. Também obtemos

$$\mathbf{\Theta}^{-1} \mathbf{H}_1 \mathbf{\Theta} = \mathbf{0}. \quad (2.12)$$

Deste modo, usando as equações (2.10), (2.8), (2.11) e (2.12), chegamos a

$$\begin{aligned} \mathbf{x}[n] &= \mathbf{F} \mathbf{\Theta}^{-1} (\mathbf{H}_0 \mathbf{s}[n] + \mathbf{H}_1 \mathbf{s}[n-1] + \boldsymbol{\eta}[n]) \\ &= \mathbf{F} \mathbf{\Theta}^{-1} \mathbf{H}_0 \mathbf{\Theta} \mathbf{F}^H \mathbf{a}[n] + \mathbf{F} \boldsymbol{\eta}[n] + \mathbf{F} \mathbf{\Theta}^{-1} \boldsymbol{\eta}[n] \\ &= \mathbf{F} \mathcal{C}(\mathbf{h}^0) \mathbf{F}^H \mathbf{a}[n] + \mathbf{w}[n], \end{aligned} \quad (2.13)$$

em que foi denotado $\mathbf{w}[n] = (w[n, 0], \dots, w[n, N_c - 1])^T = \mathbf{F} \mathbf{\Theta}^{-1} \boldsymbol{\eta}[n]$. Vemos que a restrição $L \leq N_{\text{cp}} + 1$ tem como efeito eliminar a interferência entre símbolos OFDM.

Os N_c sub-canais ortogonais aparecem sabendo que $\mathbf{F} \mathcal{C}(\mathbf{h}^0) \mathbf{F}^H = \text{diag}(\mathbf{W} \mathbf{h}^0)$, devido

a uma propriedade das matrizes circulantes que mostramos abaixo. Finalmente,

$$\mathbf{x}[n] = \text{diag}(\mathbf{W}\mathbf{h}^0)\mathbf{a}[n] + \mathbf{w}[n]. \quad (2.14)$$

Propriedade. A matriz circulante $\mathcal{C}(\mathbf{c})$, em que $\mathbf{c} = (c_0, \dots, c_{N-1})^T$, pode ser decomposta como

$$\mathcal{C}(\mathbf{c}) = \mathbf{F}^H \text{diag}(\mathbf{W}\mathbf{c})\mathbf{F}.$$

Prova. A contas decorrentes são diretas. O elemento de posição pl em $\frac{1}{\sqrt{N}}\mathcal{C}(\mathbf{c})\mathbf{W}^H$ é dado por

$$\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} c_{(p-k)_N} \omega_N^{-lk}.$$

Já o elemento de posição ml em $\frac{1}{N}\mathbf{W}\mathcal{C}(\mathbf{c})\mathbf{W}^H$ é dado por

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{N}\mathbf{W}\mathcal{C}(\mathbf{c})\mathbf{W}^H\right)_{ml} &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{p=0}^{N-1} \omega_N^{mp} \left(\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} c_{(p-k)_N} \omega_N^{-lk} \right) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{p=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} c_{(p-k)_N} \omega_N^{mp-lk} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{p=0}^{N-1} \sum_{q=0}^{N-1} c_q \omega_N^{mp-l(p-q)}, \quad \text{aqui fizemos } q = (p-k)_N, \\ &= \sum_{q=0}^{N-1} c_q \omega_N^{lq} \frac{1}{N} \sum_{p=0}^{N-1} \omega_N^{(m-l)p}. \end{aligned}$$

O operador $(\cdot)_{mn}$ retorna elemento de posição mn da matriz a que é aplicado. Observando que

$$\frac{1}{N} \sum_{p=0}^{N-1} \omega_N^{(m-l)p} = \begin{cases} 1, & \text{se } m = l, \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

obtemos, por fim,

$$\frac{1}{N}\mathbf{W}\mathcal{C}(\mathbf{c})\mathbf{W}^H = \text{diag}(\mathcal{F}\mathbf{c}).$$

□

2.3 Variação Temporal do Canal no OFDM

Quando o canal varia temporalmente durante a transmissão do símbolo OFDM, há perda de ortogonalidade entre as sub-portadoras, i.e., deixa-se de ter uma matriz diagonal

na equação (2.14), ou $\Theta^{-1}\mathbf{H}_0\Theta$ perde sua circularidade. Neste caso, podemos reescrever a equação (2.13) como

$$\mathbf{x}[n] = \mathbf{F}\mathbf{H}_v[n]\mathbf{F}^H\mathbf{a}[n] + \mathbf{w}[n],$$

onde a matriz $\mathbf{H}_v[n]$ é dada por

$$\mathbf{H}_v[n] = \begin{pmatrix} h_{0,0}^n & h_{0,N-1}^n & \cdots & h_{0,1}^n \\ h_{1,1}^n & h_{1,0}^n & \cdots & h_{1,2}^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{N-1,N-1}^n & h_{N-1,N-2}^n & \cdots & h_{N-1,0}^n \end{pmatrix},$$

em que definimos

$$h_{p,l}^n = \begin{cases} h[nN_s + N_{cp} + p, l], & \text{para } 0 \leq l \leq L-1, \\ 0, & \text{para } L \leq l \leq N_c, \end{cases}$$

ou, equivalentemente, $h_{p,l}^n = (\mathbf{h}^0[(n-1)N_s + N_{cp} + p])_l$, em que $\mathbf{h}^0[m] = (h[m, 0], \dots, h[m, L-1], 0, \dots, 0)^T$ tem dimensão $N_c \times 1$. O operador $(\cdot)_n$, para sub-índice minúsculo, retorna o l -ésimo elemento do vetor a que é aplicado.

Seja $\mathcal{H}_v[n] = \mathbf{F}\mathbf{H}_v[n]\mathbf{F}^H$, cujo elemento de posição ml é escrito como

$$\begin{aligned} (\mathcal{H}_v[n])_{ml} &= \frac{1}{\sqrt{N_c}} \sum_{p=0}^{N_c-1} \omega_{N_c}^{mp} \left(\frac{1}{\sqrt{N_c}} \sum_{k=0}^{N_c-1} h_{p,(p-k)N_c}^n \omega_{N_c}^{-lk} \right) \\ &= \frac{1}{N_c} \sum_{p=0}^{N_c-1} \sum_{k=0}^{N_c-1} h_{p,(p-k)N_c}^n \omega_{N_c}^{mp-lk}. \end{aligned}$$

Estamos interessados na diagonal de $\mathcal{H}_v[n]$, dada por

$$\begin{aligned} (\mathcal{H}_v[n])_{mm} &= \frac{1}{N_c} \sum_{p=0}^{N_c-1} \sum_{k=0}^{N_c-1} h_{p,(p-k)N_c}^n \omega_{N_c}^{m(p-k)} \\ &= \frac{1}{N_c} \sum_{p=0}^{N_c-1} (\mathbf{W}\mathbf{h}^0[nN_s + N_{cp} + p])_m \\ &= \left(\mathbf{W} \frac{\sum_{p=0}^{N_c-1} \mathbf{h}^0[nN_s + N_{cp} + p]}{N_c} \right)_m \\ &= (\mathbf{W}\bar{\mathbf{h}}^0[n])_m, \end{aligned}$$

em que foi definido

$$\bar{\mathbf{h}}^0[n] = \frac{1}{N_c} \sum_{m=nN_s+N_{cp}}^{(n+1)N_s-1} \mathbf{h}^0[m]. \quad (2.15)$$

No decorrer deste capítulo, para uma seqüência de vetores qualquer $\mathbf{y}[m]$, a barra de $\bar{\mathbf{y}}[n]$ significa que estamos considerando a média conjunta dos instantes de $(nN_s + N_{\text{cp}})$ a $(n+1)N_s - 1$, como na equação (2.15).

Daí, podemos decompor $\mathbf{H}_v[n]$ como

$$\mathbf{H}_v[n] = \mathcal{C}(\bar{\mathbf{h}}^0[n]) + \mathbf{H}_e[n],$$

de modo que $\mathcal{H}[n]$ é escrito como

$$\mathcal{H}_v[n] = \text{diag}(\mathbf{W}\bar{\mathbf{h}}^0[n]) + \mathcal{H}_e[n],$$

com $\text{diag}(\mathcal{H}_e[n]) = \mathbf{0}$, em que $\mathcal{H}_e[n] = \mathbf{F}\mathbf{H}_e[n]\mathbf{F}^H$.

Reescrevemos a equação (2.14) agora com um termo adicional $\mathbf{u}[n] = (u[n, 0], \dots, u[n, N_c - 1])^T = \mathcal{H}_e[n]\mathbf{a}[n]$, responsável pela ICI:

$$\mathbf{x}[n] = \text{diag}(\mathbf{H}[n])\mathbf{a}[n] + \mathbf{u}[n] + \mathbf{w}[n], \quad (2.16)$$

onde definimos $\mathbf{H}[n] = (H[n, 0], \dots, H[n, N_c - 1])^T = \mathbf{W}\bar{\mathbf{h}}^0[n]$.

2.4 Correlações do Canal TDL no OFDM

Inicialmente reescrevemos a equação (2.7) na forma vetorial

$$\mathbf{h}[m] = \mathbf{G}_\tau \boldsymbol{\gamma}[m], \quad (2.17)$$

em que $\mathbf{h}[m] = (h[m, 0], \dots, h[m, L - 1])^T$ e $\boldsymbol{\gamma}[m] = (\gamma_0[m], \dots, \gamma_{K-1}[m])^T$, e a matriz \mathbf{G}_τ possui o elemento $g_{lk} = g(lT_s - \tau_k - \tau')$ em sua entrada lk . Seja \mathbf{G}_τ^0 a matriz \mathbf{G}_τ adicionada em seu fim de $N_c - L$ linhas nulas, de modo que $\mathbf{h}^0[m] = \mathbf{G}_\tau^0 \boldsymbol{\gamma}[m]$. Portanto, temos

$$\begin{aligned} \mathbf{H}[n] &= \mathbf{W}\mathbf{G}_\tau^0 \bar{\boldsymbol{\gamma}}[n] \\ &= \mathbf{W}_\tau \bar{\boldsymbol{\gamma}}[n], \end{aligned} \quad (2.18)$$

onde $\mathbf{W}_\tau = \mathbf{W}\mathbf{G}_\tau^0$.

Os elementos de \mathbf{W}_τ são dados por

$$\begin{aligned} (\mathbf{W}_\tau)_{k_2 k_1} &= \sum_{l=0}^{L-1} \omega_{N_c}^{k_2 l} g(lT_s - \tau_{k_1} - \tau') \\ &\approx \sum_{l=-\infty}^{\infty} \exp(-j2\pi k_2 l / N_c) g(lT_s - \tau_{k_1} - \tau') \\ &= \left[\exp\left(\frac{-j2\pi k_2 t}{N_c T_s}\right) g(t - \tau_{k_1} - \tau') \right] * \left(\sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta(t - lT_s) \right), \end{aligned}$$

de modo que a transformada de Fourier do último termo acima resulta em

$$\begin{aligned} (\mathbf{W}_\tau)_{k_2 k_1} &\leftrightarrow G\left(f + \frac{k_2}{N_c T_s}\right) \exp\left(-j2\pi\left(f + \frac{k_2}{N_c T_s}\right)(\tau_{k_1} + \tau')\right) \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - n/T_s) \\ &= \delta(f) \frac{1}{T_s} G\left(\frac{k_2}{N_c T_s}\right) \exp\left(-j2\pi \frac{k_2}{N_c T_s} (\tau_{k_1} + \tau')\right) \\ &= \delta(f) \exp\left(-j2\pi \frac{k_2}{N_c T_s} (\tau_{k_1} + \tau')\right), \end{aligned} \quad (2.19)$$

onde consideramos $G\left(\frac{n}{T_s}\right) = 0$, para $n \neq 0$, e $G\left(\frac{k_2}{N_c T_s}\right) = T_s$, para $k_2 = 0, \dots, N_c - 1$. Na prática, a escolha de $g(\tau)$ não garante tais restrições a $G(f)$. Porém, com uma reordenação nas linhas da matriz de Fourier \mathbf{W} , tem-se o mesmo resultado da equação (2.19). No caso, todos os cálculos decorrentes mudariam, mas os resultados finais continuariam os mesmos.

Portanto, temos

$$(\mathbf{W}_\tau)_{k_2 k_1} = \exp\left(-j \frac{2\pi}{N_c} \frac{k_2 (\tau_{k_1} + \tau')}{T_s}\right)$$

e

$$H[n, k] = \sum_{l=0}^{K-1} \bar{\gamma}_l[n] \exp\left(-j \frac{2\pi}{N_c} \frac{k (\tau_l + \tau')}{T_s}\right),$$

em que $\bar{\gamma}_l[n] = \frac{1}{N_c} \sum_{i=0}^{N_c-1} \gamma_l[nN_s + N_{cp} + i]$.

Agora encontraremos as correlações de $H[n, k]$, que com as suposições feitas assume uma forma útil que nos permitirá simplificar o estimador MMSE do canal. A correlação de $H[n, k]$ é

$$\mathbb{E}\{H^*[n_1, k_1] H[n_2, k_2]\} = \sum_{l=0}^{K-1} \mathbb{E}\{\bar{\gamma}_l^*[n_1] \bar{\gamma}_l[n_2]\} \exp\left(-j \frac{2\pi}{N_c} \frac{(\tau_l + \tau')}{T_s} (k_2 - k_1)\right),$$

onde foi usado que $\mathbb{E}\{\bar{\gamma}_{l_1}^*[n_1] \bar{\gamma}_{l_2}[n_2]\} = 0$, para $l_1 \neq l_2$. A segunda esperança na equação

acima é desenvolvida como

$$\begin{aligned}
r_{\tilde{\gamma}_l}[n_2 - n_1] &= \mathbb{E}\{\tilde{\gamma}_l^*[n_1]\tilde{\gamma}_l[n_2]\} \\
&= \mathbb{E}\left\{\frac{1}{N_c} \sum_{i_1=0}^{N_c-1} \gamma_l^*[n_1 N_s + N_{\text{cp}} + i_1] \frac{1}{N_c} \sum_{i_2=0}^{N_c-1} \gamma_l[n_2 N_s + N_{\text{cp}} + i_2]\right\} \\
&= \frac{\rho(\tau_l)}{N_c^2} \sum_{i_1=0}^{N_c-1} \sum_{i_2=0}^{N_c-1} r_{t,1}[(n_2 - n_1)N_s + i_2 - i_1], \tag{2.20}
\end{aligned}$$

que depende apenas de $n_2 - n_1$. Definimos então o fator

$$\kappa = \frac{r_{\tilde{\gamma}_l}[0]}{\rho(\tau_l)} = \frac{1}{N_c^2} \sum_{i_1=0}^{N_c-1} \sum_{i_2=0}^{N_c-1} r_{t,1}[i_2 - i_1].$$

E, assim, podemos escrever

$$\begin{aligned}
r_H[n, k] &= \mathbb{E}\{H^*[n_1, k_1]H[n_1 + n, k_1 + k]\} \\
&= \kappa r_{t,2}[n] \left\{ \sum_{l=0}^{K-1} \rho(\tau_l) \exp\left(-j \frac{2\pi}{N_c} \frac{(\tau_l + \tau')}{T_s} k\right) \right\} \\
&= \kappa \sigma_h^2 r_{t,2}[n] r_f[k], \tag{2.21}
\end{aligned}$$

onde $\sigma_h^2 = \sum_{l=0}^{K-1} \rho(\tau_l)$ é a potência média do canal. Os termos $r_{t,2}[n]$ e $r_f[k]$ são as correlações normalizadas no tempo e frequência, i.e., satisfazem $r_{t,2}[0] = 1$ e $r_f[0] = 1$. No que segue, consideraremos $\sigma_h^2 = 1$. A potência restante $(1 - \kappa)\sigma_h^2$, como veremos mais adiante, aparece como potência da ICI. A propriedade de que as correlações do canal podem ser escritas como o produto entre as correlações no tempo e as correlações na frequência, como na equação (2.21), só foi possível devido à suposição de que as amplitudes complexas $\gamma_l[n]$ têm todas a mesma correlação normalizada.

Precisamos relacionar a transformada de Fourier discreta de $r_{t,2}[n]$ com a transformada de $r_{t,1}[m]$. A equação (2.20) fornece

$$\begin{aligned}
p_{t,2}(\nu) &= \kappa^{-1} \frac{1}{\rho(\tau_l)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} r_{\tilde{\gamma}_l}[n] \exp(-j2\pi n\nu) \\
&= \kappa^{-1} \frac{1}{N_c^2} \sum_{i_1=0}^{N_c-1} \sum_{i_2=0}^{N_c-1} \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} r_{t,1}[nN_s + i_2 - i_1] \exp(-j2\pi n\nu) \right\}.
\end{aligned}$$

Vendo que

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} r_{t,1}[nN_s + i_2 - i_1] \exp(-j2\pi n\nu) = \frac{1}{N_s} p_{t,1}\left(\frac{\nu}{N_s}\right) \cdot \exp\left(j2\pi \frac{i_2 - i_1}{N_s} \nu\right),$$

para $-1/2 \leq \nu \leq 1/2$, onde $p_{t,1}(\nu)$ é a transformada de Fourier discreta de $r_{t,1}[n]$, obtemos

$$\begin{aligned} p_{t,2}(\nu) &= \kappa^{-1} \frac{1}{N_s} p_{t,1}\left(\frac{\nu}{N_s}\right) \left\{ \frac{1}{N_c^2} \sum_{i_1=0}^{N_c-1} \sum_{i_2=0}^{N_c-1} \exp\left(j2\pi \frac{i_2 - i_1}{N_s} \nu\right) \right\} \\ &= \kappa^{-1} \frac{1}{N_s} p_{t,1}\left(\frac{\nu}{N_s}\right) m_t\left(\frac{\nu}{N_s}\right), \end{aligned} \quad (2.22)$$

em que

$$\begin{aligned} m_t(\nu) &= \frac{1}{N_c^2} \sum_{i_1=0}^{N_c-1} \sum_{i_2=0}^{N_c-1} \exp\{j2\pi(i_2 - i_1)\nu\} \\ &= \left| \frac{1}{N_c} \sum_{i=0}^{N_c-1} \exp(j2\pi i\nu) \right|^2 = \left| \frac{1}{N_c} \frac{1 - \exp(j2\pi N_c \nu)}{1 - \exp(j2\pi \nu)} \right|^2 \\ &= \frac{1}{N_c^2} \frac{1 - \cos(2\pi N_c \nu)}{1 - \cos(2\pi \nu)} = \frac{1}{N_c^2} \frac{2 \operatorname{sen}^2(\pi N_c \nu)}{2 \operatorname{sen}^2(\pi \nu)} \\ &= \frac{\operatorname{sinc}^2(N_c \nu)}{\operatorname{sinc}^2(\nu)}. \end{aligned}$$

O fator κ é dado alternativamente como

$$\begin{aligned} \kappa &= \int_{-1/2}^{1/2} \frac{1}{N_s} p_{t,1}\left(\frac{\nu}{N_s}\right) m_t\left(\frac{\nu}{N_s}\right) d\nu \\ &= \int_{-1/2}^{1/2} p_{t,1}(\nu) m_t(\nu) d\nu. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Com $p_{t,1}(\nu)$ limitado a $[-\nu_{d,1}, \nu_{d,1}]$, segue então que $p_{t,2}(\nu)$ tem suporte $[-\nu_{d,2}, \nu_{d,2}]$, em que $\nu_{d,2} = N_s \nu_{d,1}$.

2.5 Derivação da Potência da ICI

Agora derivaremos a potência média da interferência $\mathbf{u}[n] = \mathcal{H}_e[n]\mathbf{a}[n]$. A potência média da ICI sobre a k -ésima sub-portadora é dada por

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{ICI},k}^2 &= \mathbb{E} \left| \sum_{i=0}^{N_c-1} (\mathcal{H}_e[n])_{ki} a[n, i] \right|^2 \\ &= \sigma_a^2 \sum_{i=0}^{N_c-1} \mathbb{E} |(\mathcal{H}_e[n])_{ki}|^2, \end{aligned} \quad (2.24)$$

em que σ_a^2 é a potência média de $a[n, k]$. Seja e_{ml} o elemento de posição ml da matriz $\mathbf{H}_e[n]$. Os elementos de $\mathcal{H}_e[n]$ são explicitados como

$$(\mathcal{H}_e[n])_{ki} = \frac{1}{N_c} \sum_{m=0}^{N_c-1} \sum_{l=0}^{N_c-1} e_{ml} \omega_{N_c}^{km-il},$$

cujas substituição na equação (2.24) resulta em

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{ICI},k}^2 &= \sigma_a^2 \sum_{i=0}^{N_c-1} \mathbb{E} \left| \frac{1}{N_c} \sum_{m=0}^{N_c-1} \sum_{l=0}^{N_c-1} e_{ml} \omega_{N_c}^{km-il} \right|^2 \\ &= \sigma_a^2 \frac{1}{N_c^2} \sum_{i, m_1, m_2, l_1, l_2=0}^{N_c-1} \mathbb{E} \{ e_{m_1 l_1}^* e_{m_2 l_2} \} \omega_{N_c}^{k(m_2-m_1)} \omega_{N_c}^{-i(l_2-l_1)} \\ &= \sigma_a^2 \frac{1}{N_c} \sum_{l, m_1, m_2=0}^{N_c-1} \mathbb{E} \{ e_{m_1 l}^* e_{m_2 l} \} \omega_{N_c}^{k(m_2-m_1)}, \end{aligned} \quad (2.25)$$

onde na passagem da penúltima para a última equação acima usamos

$$\sum_{i=0}^{N_c-1} \omega_{N_c}^{-i(l_2-l_1)} = \begin{cases} N_c, & \text{se } l_1 = l_2, \\ 0, & \text{se } l_1 \neq l_2. \end{cases}$$

Substituindo na equação (2.25) a expansão

$$\begin{aligned} e_{ml} &= h_{m, (m-l)_{N_c}}^n - \frac{1}{N_c} \sum_{i=0}^{N_c-1} h_{i, (m-l)_{N_c}}^n \\ &= h_{m, (m-l)_{N_c}}^n - \bar{h}_{(m-l)_{N_c}}^n, \end{aligned}$$

encontramos

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{ICI},k}^2 &= \sigma_a^2 \frac{1}{N_c} \sum_{l, m_1, m_2}^{N_c-1} \mathbb{E} \{ (h_{m_1, (m_1-l)_{N_c}}^n - \bar{h}_{(m_1-l)_{N_c}}^n)^* \cdot (h_{m_2, (m_2-l)_{N_c}}^n - \bar{h}_{(m_2-l)_{N_c}}^n) \} \omega_{N_c}^{k(m_2-m_1)} \\ &= \sigma_a^2 \frac{1}{N_c} \sum_{l=0}^{N_c-1} \mathbb{E} \left\{ \left(\sum_{m_1=0}^{N_c-1} h_{m_1, (m_1-l)_{N_c}}^n \omega_{N_c}^{k(m_1-l)} - \sum_{m_1=0}^{N_c-1} \bar{h}_{(m_1-l)_{N_c}}^n \omega_{N_c}^{k(m_1-l)} \right)^* \right. \\ &\quad \left. \cdot \left(\sum_{m_2=0}^{N_c-1} h_{m_2, (m_2-l)_{N_c}}^n \omega_{N_c}^{k(m_2-l)} - \sum_{m_2=0}^{N_c-1} \bar{h}_{(m_2-l)_{N_c}}^n \omega_{N_c}^{k(m_2-l)} \right) \right\}. \end{aligned}$$

O segundo termo nos parênteses acima é reconhecido como $H[n, k]$, de modo que podemos escrever

$$\begin{aligned}
\sigma_{ICI,k}^2 &= \sigma_a^2 \frac{1}{N_c} \sum_{l, m_1, m_2=0}^{N_c-1} \mathbb{E} \{ h_{m_1, (m_1-l)_{N_c}}^{n*} h_{m_2, (m_2-l)_{N_c}}^n \} \omega_{N_c}^{k(m_2-m_1)} \\
&\quad - \sigma_a^2 \mathbb{E} \left\{ \left(\frac{1}{N_c} \sum_{l, m_1=0}^{N_c-1} h_{m_1, (m_1-l)_{N_c}}^n \omega_{N_c}^{k(m_1-l)} \right)^* H[n, k] \right\} \\
&\quad - \sigma_a^2 \mathbb{E} \left\{ H^*[n, k] \left(\frac{1}{N_c} \sum_{l, m_2=0}^{N_c-1} h_{m_2, (m_2-l)_{N_c}}^n \omega_{N_c}^{k(m_2-l)} \right) \right\} + \sigma_a^2 \frac{1}{N_c} \sum_{l=0}^{N_c-1} \mathbb{E} |H[n, k]| \\
&= \sigma_a^2 \left(\frac{1}{N_c} \sum_{l, m_1, m_2=0}^{N_c-1} \mathbb{E} \{ h_{m_1, (m_1-l)_{N_c}}^{n*} h_{m_2, (m_2-l)_{N_c}}^n \} \cdot \omega_{N_c}^{k(m_2-m_1)} - \mathbb{E} |H[n, k]|^2 \right). \quad (2.26)
\end{aligned}$$

Expandindo $h_{m,l}^n$ como na equação (2.7), temos que a primeira esperança dada na equação (2.26) pode ser escrita como

$$\mathbb{E} \{ h_{m_1, (m_1-l)_{N_c}}^{n*} h_{m_2, (m_2-l)_{N_c}}^n \} = \sum_{i=0}^{K-1} r_{\gamma_i} [m_2 - m_1] g_{(m_1-l)_{N_c}, i}^* g_{(m_2-l)_{N_c}, i},$$

em que $r_{\gamma_i} [m] = \mathbb{E} \{ \gamma_i^* [m_1] \gamma_i [m_1 + m] \}$. Deste modo, podemos expressar o primeiro somatório dado na equação (2.26) como

$$\begin{aligned}
\frac{1}{N_c} \sum_{i=0}^{K-1} \sum_{l, m_1, m_2=0}^{N_c-1} r_{\gamma_i} [m_2 - m_1] g_{(m_1-l)_{N_c}, i}^* g_{(m_2-l)_{N_c}, i} \cdot \omega_{N_c}^{k(m_2-m_1)} \\
= \sum_{i=0}^{K-1} \sum_{q=0}^{N_c-1} r_{\gamma_i} [q] \left(\sum_{(m_2-m_1)_{N_c}=q} g_{m_1 i}^* g_{m_2 i} \right) \cdot \omega^{kq}.
\end{aligned}$$

Já o termo

$$\sum_{(m_2-m_1)_{N_c}=q} g_{m_1 i}^* g_{m_2 i}$$

é reconhecido como o elemento de posição m da convolução circular da seqüência $\{g_{mi}\}_{m=0}^{N_c-1}$ consigo mesma. Como vimos, a transformada de Fourier discreta dessa seqüência é $\exp(-j \frac{2\pi}{N_c} \frac{n(\tau_i + \tau')}{T_s})$. Portanto, a transformada de $\{g_{mi}\} * \{g_{mi}\}$ é constante igual a 1. Isso nos diz então que

$$\sum_{(m_2-m_1)_{N_c}=q} g_{m_1 i}^* g_{m_2 i} = \begin{cases} 1, & \text{para } q = 0, \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

Daí, finalmente,

$$\sigma_{\text{ICI},k}^2 = \sigma_a^2 \left(\sum_{i=0}^{K-1} r_{\gamma_i}[0] - \mathbb{E}|H[n, k]|^2 \right).$$

Sendo a potência do canal e das sub-portadoras dada por

$$\sigma_h^2 = \sum_{i=0}^{K-1} \rho(\tau_i), \quad \sigma_H^2 = \mathbb{E}|H[n, k]|^2,$$

temos

$$\sigma_{\text{ICI}}^2 = \sigma_a^2(\sigma_h^2 - \sigma_H^2). \quad (2.27)$$

Devido a $\sigma_{\text{ICI},k}^2$ ser igual para todas as sub-portadoras, foi eliminado o sub-índice k . O resultado acima é bastante expressivo. A potência do canal se distribui entre a potência da sub-portadora e a potência da ICI. No caso em que as amplitudes complexas dos multi-percursos têm a mesma correlação normalizada, tem-se

$$\sigma_{\text{ICI}}^2 = (1 - \kappa)\sigma_h^2\sigma_a^2. \quad (2.28)$$

Na derivação da equação (2.27), foi suposto somente que o canal obedece o modelo TDL e os símbolos de cada sub-portadora têm mesma potência

2.5.1 Limite Superior para σ_{ICI}^2

Queremos agora encontrar o σ_{ICI}^2 máximo que se pode obter para dado $\nu_{d,1}$. Da equação (2.28), vê-se que σ_{ICI}^2 é máximo quando κ é mínimo. Portanto, de κ dado na equação (2.23), obtemos

$$\begin{aligned} \kappa &= \int_{-\nu_{d,1}}^{\nu_{d,1}} p_{t,1}(\nu) m_t(\nu) d\nu \\ &\geq \left(\min_{-\nu_{d,1} \leq \nu \leq \nu_{d,1}} m_t(\nu) \right) \cdot \int_{-\nu_{d,1}}^{\nu_{d,1}} p_{t,1}(\nu) d\nu \\ &= m_t(\nu_{d,1}), \end{aligned}$$

em que foi observado que o mínimo de $m_t(\nu)$ em $[-\nu_{d,1}, \nu_{d,1}]$ é $m_t(\nu_{d,1})$, e $p_{t,1}(\nu)$ tem integral unitária. De fato, o máximo $\sigma_{\text{ICI}}^2 = (1 - m_t(\nu_{d,1}))\sigma_h^2$ pode ser obtido para

$$p_{t,1}(\nu) = \frac{1}{2} [\delta(\nu + \nu_{d,1}) + \delta(\nu - \nu_{d,1})],$$

cuja função de correlação correspondente é

$$r_{t,1}[n] = \cos(2\pi\nu_{d,1}n).$$

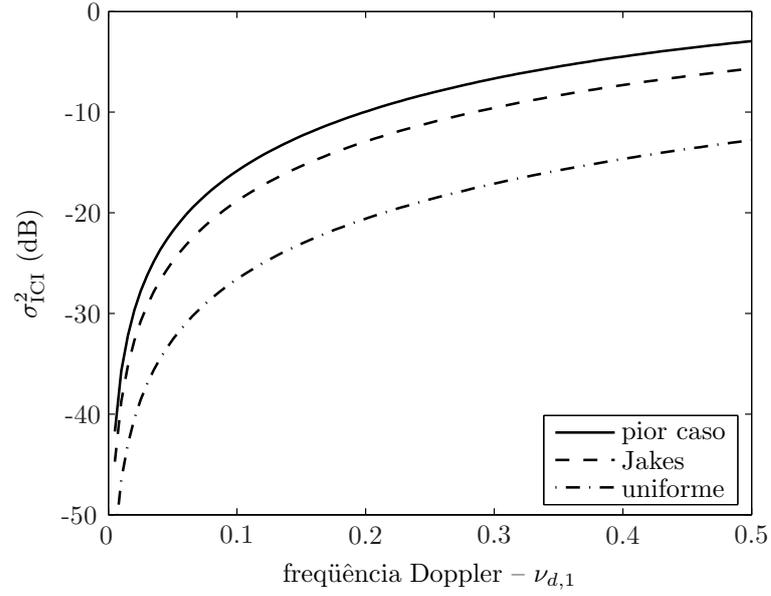


Figura 2.4: Curvas de $\nu_{d,1} \times \sigma_{ICI}^2$ para diferentes espectros Doppler.

Para efeito de comparação, consideremos o espectro passa-baixa uniforme e sua função de correlação correspondente:

$$p_{B,1}(\nu) = \begin{cases} \frac{1}{2\nu_{d,1}} & \text{se } |\nu| \leq \nu_{d,1}, \\ 0, & \text{c.c.,} \end{cases} \quad r_{B,1}[n] = \text{sinc}(2\nu_{d,1}n).$$

A figura 2.4 ilustra o σ_{ICI}^2 como uma função de $\nu_{d,1}$, para o espectro de pior caso encontrado, e os espectros de Jakes e uniforme.

3 Estimador MMSE

O OFDM transforma um canal seletivo na frequência num conjunto de sub-canais planos. Embora o tratamento de canais planos seja mais simples, ainda se faz necessário estimá-los, a fim de recuperar coerentemente os símbolos transmitidos $a[n, k]$ a partir do sinal recebido $x[n, k]$. A solução encontrada para o problema de estimação é a escolha de sub-portadoras pilotos onde os símbolos transmitidos são conhecidos no receptor. É claro que o número de sub-portadoras pilotos deve ser reduzido ao máximo, para que se tenha maior número de sub-portadoras carregando dados. A “densidade” das sub-portadoras piloto deve respeitar certas restrições como o grau máximo da seletividade temporal que o receptor deve suportar, ou mesmo restrições quanto à taxa de erro. Será abordada a distribuição das sub-portadoras piloto em *grid*, conforme ilustrado na figura 3.1. O passo inicial é a realização da estimativa LS nas portadoras piloto, que resultam em estimativas pouco precisas. Com base na correlação do canal tanto no tempo como na frequência, as estimativas das sub-portadoras piloto são então filtradas, dando lugar a estimativas de maior exatidão. A estimação das sub-portadoras restantes é feita por meio de interpolação, que pode obedecer diversos critérios, como a interpolação passa-baixa, a interpolação MMSE ou outro critério qualquer. É fato que o estimador que explora as correlações do canal tem melhores resultados, porém, ao custo de maior complexidade computacional. Por outro lado, o uso de estimadores robustos não necessita do conhecimento dessas correlações, mas ao custo de perda de desempenho do estimador. Neste capítulo são derivados o estimador MMSE considerando filtros IIR e FIR (*Finite Impulse Response*). Também é derivada a versão robusta do estimador MMSE.

3.1 Derivação do Estimador MMSE

Para facilitar a estimação LS, os símbolos piloto são selecionados de uma constelação PSK. Nas sub-portadoras restantes, a constelação pode ser de qualquer tipo, geralmente a do tipo QAM (*Quadrature Amplitude Modulation*). Conhecendo os símbolos transmitidos

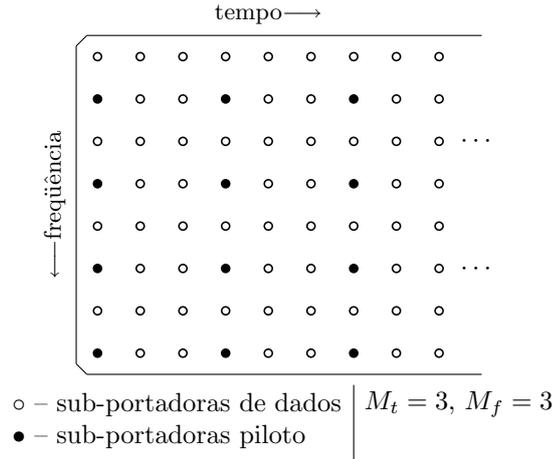


Figura 3.1: Disposição em *grid* das sub-portadoras piloto.

nas sub-portadoras piloto, realiza-se então a estimativa LS do canal como

$$\begin{aligned}
 \tilde{H}[n, k] &= x[n, k]a^*[n, k] \\
 &= H[n, k] + (u[n, k] + w[n, k])a^*[n, k] \\
 &= H[n, k] + z[n, k],
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

onde $z[n, k] = (u[n, k] + w[n, k])a^*[n, k]$. Embora a ICI, que corresponde ao termo $u[n, k]$, seja correlacionada para diferentes n 's e k 's, tem-se que o termo $z[n, k]$ deve satisfazer

$$\mathbb{E}\{z^*[n_1, k_1]z[n_2, k_2]\} = 0, \quad \text{para quaisquer } n_1 \neq n_2 \text{ e/ou } k_1 \neq k_2, \tag{3.2a}$$

$$\mathbb{E}\{H^*[n_1, k_1]z[n_2, k_2]\} = 0, \quad \text{para quaisquer } n_1, n_2, k_1, k_2. \tag{3.2b}$$

Isso se deve à independência entre os símbolos $a[n, k]$. Essas desconexões simplificam enormemente a derivação do *filtro de Wiener*, responsável pelas estimativas MMSE.

Será assumido que as sub-portadoras piloto ocupam as posições $n = mM_t$, para $m \in \mathbb{Z}$, e $k = lM_f$, para $l = 0, 1, \dots, N_p$, onde supõe-se que N_c/M_f é inteiro, i.e., que N_c é múltiplo de M_f .

3.1.1 Estimador IIR

Os coeficientes do filtro de Wiener $c[m, l; n', k]$ são escolhidos de modo que a estimativa

$$\hat{H}[n, k] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{l=(k-k'-N_c)/M_f+1}^{(k-k')/M_f} c[m, l; n', k] \tilde{H}[n - n' - mM_t, k - k' - lM_f] \tag{3.3}$$

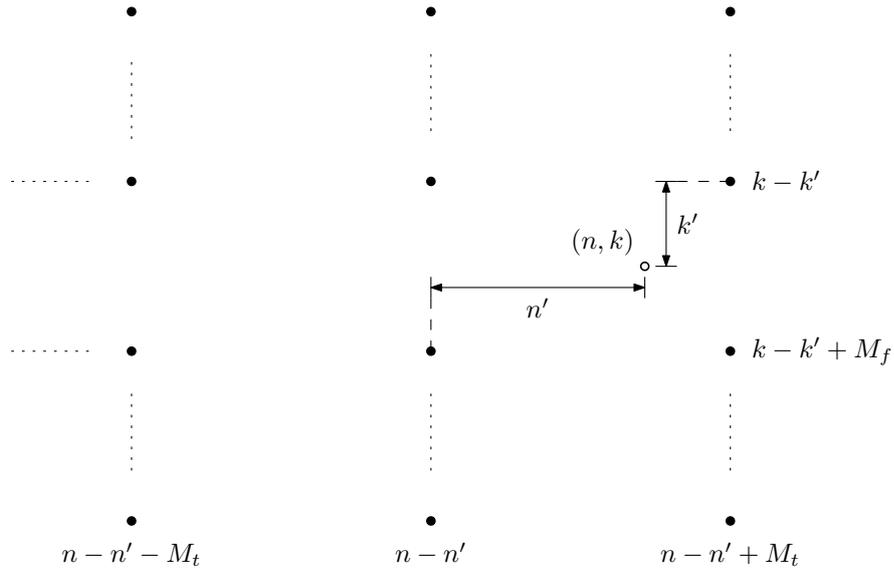


Figura 3.2: Relação entre os índices usados na derivação do estimador MMSE.

minimize o erro quadrático médio

$$\mathbb{E}\{|\hat{H}[n, k] - H[n, k]|^2\}. \quad (3.4)$$

Os índices $n' = (n)_{M_t}$ e $k' = (k)_{M_f}$ foram inseridos para facilitar os cálculos. Perceba que os coeficientes do filtro de Wiener são indexados por n' mas não por n , o que não ocorre para o índice k . A figura 3.2 ilustra a relação entre esses diversos índices.

A minimização do erro dado na equação (3.4) leva ao princípio da ortogonalidade [38]

$$\mathbb{E}\{(\hat{H}[n, k] - H[n, k])\tilde{H}^*[n - n' - mM_t, k - k' - lM_f]\} = 0, \quad (3.5)$$

para $m \in \mathbb{Z}$ e $l = (k - k' - N_c)/M_f + 1, \dots, (k - k')/M_f$. Substituindo na equação (3.5) a estimativa $\hat{H}[n, k]$ dada na equação (3.3), temos

$$\mathbb{E}\left\{\left(\sum_{m_1, l_1} c[m_1, l_1; n', k]\tilde{H}[n - n' - m_1M_t, k - k' - l_1M_f] - H[n, k]\right) \cdot \tilde{H}^*[n - n' - mM_t, k - k' - lM_f]\right\} = 0,$$

onde, por simplicidade, foram omitidos no somatório acima os limites dos índices m_1 e

k_1 ; ou

$$\sum_{m_1, l_1} c[m_1, l_1; n', k] r_H[(m - m_1)M_t, (l - l_1)M_f] - r_H[n' + mM_t, k' + lM_f] + \rho c[m, l; n', k] = 0, \quad (3.6)$$

em que

$$\begin{aligned} \rho &= \mathbb{E}\{|z[n, k]|^2\} = \mathbb{E}\{|u[n, k]|^2\} + \mathbb{E}\{|w[n, k]|^2\} \\ &= \sigma_{\text{ICI}}^2 + \sigma_w^2 = (1 - \kappa)\sigma_h^2 + \sigma_w^2. \end{aligned} \quad (3.7)$$

A expressão obtida na equação (3.6) só foi possível graças às decorrelações dadas na equação (3.2). Utilizando a propriedade dada na equação (2.21) sobre a correlação do canal, com $\sigma_h^2 = 1$, a equação (3.6) é reescrita como

$$\sum_{m_1, l_1} c[m_1, l_1; n', k] \kappa r_{t,2}[(m - m_1)M_t] r_f[(l - l_1)M_f] - \kappa r_{t,2}[n' + mM_t] r_f[k' + lM_f] + \rho c[m, l; n', k] = 0, \quad (3.8)$$

Sejam

$$\mathbf{r}_f[k] = \begin{pmatrix} r_f[k] \\ r_f[k - M_f] \\ \vdots \\ r_f[k - N_c + M_f] \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c}_2[m; n', k] = \begin{pmatrix} c[m, (k - k')/M_f; n', k] \\ c[m, (k - k')/M_f - 1; n', k] \\ \vdots \\ c[m, (k - k' - N_c)/M_f + 1; n', k] \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

e

$$\mathbf{R}_f = (\mathbf{r}_f[0], \mathbf{r}_f[M_f], \dots, \mathbf{r}_f[N_c - M_f]).$$

O sub-índice '2' em $\mathbf{c}_2[m; n', k]$ indica que os elementos do vetor são ordenados conforme l . Deste modo, a equação (3.8) pode ser escrita na forma vetorial como

$$\sum_{m_1} \kappa r_{t,2}[(m - m_1)M_t] \mathbf{R}_f \mathbf{c}_2[m_1; n', k] - \kappa r_{t,2}[n' + mM_t] \mathbf{r}_f[k] + \rho \mathbf{c}_2[m; n', k] = 0. \quad (3.10)$$

Seja a auto-decomposição de \mathbf{R}_f dada por

$$\mathbf{R}_f = \mathbf{U} \mathbf{D} \mathbf{U}^H, \quad (3.11)$$

em que \mathbf{U} é matriz unitária e \mathbf{D} é uma matriz diagonal de elementos d_l . A substituição

da equação (3.11) na equação (3.10) resulta em

$$\sum_{m_1} \kappa r_{t,2}[(m - m_1)M_t] \mathbf{D} \mathbf{U}^H \mathbf{c}_2[m_1; n', k] - \kappa r_{t,2}[n' + mM_t] \mathbf{U}^H \mathbf{r}_f[k] + \rho \mathbf{U}^H \mathbf{c}_2[m; n', k] = 0.$$

E, então, definindo

$$\tilde{\mathbf{c}}_2[m; n', k] = \mathbf{U}^H \mathbf{c}_2[m; n', k], \quad \tilde{\mathbf{r}}_f[k] = \mathbf{U}^H \mathbf{r}_f[k],$$

temos, finalmente,

$$\sum_{m_1} \kappa r_{t,2}[(m - m_1)M_t] \mathbf{D} \tilde{\mathbf{c}}_2[m_1; n', k] - \kappa r_{t,2}[n' + mM_t] \tilde{\mathbf{r}}_f[k] + \rho \tilde{\mathbf{c}}_2[m; n', k] = 0,$$

ou

$$\sum_{m_1} d_l \kappa r_{t,2}[(m - m_1)M_t] \tilde{c}[m_1, l; n', k] - \kappa r_{t,2}[n' + mM_t] \tilde{r}_f[l, k] + \rho \tilde{c}[m, l; n', k] = 0, \quad (3.12)$$

em que $\tilde{r}_f[l, k]$ e $\tilde{c}[m, l; n', k]$ ocupam a posição l nos vetores $\tilde{\mathbf{r}}_f[k]$ e $\tilde{\mathbf{c}}_2[m; n', k]$, respectivamente.

Denotaremos a pseudo-inversa de \mathbf{D} por \mathbf{D}^\dagger , cujos elementos são dados por

$$d_l^\dagger = \begin{cases} 1/d_l, & \text{se } d_l \neq 0, \\ 0, & \text{se } d_l = 0. \end{cases}$$

Definindo a transformada de Fourier de $\tilde{c}[m, l; n', k]$ em relação a m como

$$\tilde{c}(\nu, l; n', k) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \tilde{c}[m, l; n', k] \exp(-j2\pi m\nu),$$

a equação (3.12) em sua versão na frequência resulta em

$$d_l \kappa p_{t,3}(\nu; 0) \tilde{c}(\nu, l; n', k) - \kappa p_{t,3}(\nu; n') \tilde{r}_f[l, k] + \rho \tilde{c}(\nu, l; n', k) = 0,$$

e, então,

$$\tilde{c}(\nu, l; n', k) = \tilde{r}_f[l, k] d_l^\dagger \frac{d_l \kappa p_{t,3}(\nu; n')}{\rho + d_l \kappa p_{t,3}(\nu; 0)}, \quad (3.13)$$

onde

$$p_{t,3}(\nu; n') = \sum_{m=-\infty}^{\infty} r_{t,2}[n' + mM_t] \exp(-j2\pi m\nu).$$

O espectro $p_{t,3}(\nu; n')$ pode ser dado em função de $p_{t,2}(\nu)$. Garantindo que a função $p_{t,2}(\nu)$

tem suporte de ao menos $[-1/2M_t, 1/2M_t]$ no intervalo $[-1/2, 1/2]$, pode-se escrever

$$\begin{aligned} p_{t,3}(\nu; M_t, n') &= \frac{1}{M_t} p_{t,2}\left(\frac{\nu}{M_t}\right) \exp\left(j2\pi \frac{n'}{M_t} \nu\right) \\ &= p_{t,3}(\nu) \exp\left(j2\pi \frac{n'}{M_t} \nu\right), \end{aligned}$$

em que

$$p_{t,3}(\nu) = \frac{1}{M_t} p_{t,2}\left(\frac{\nu}{M_t}\right). \quad (3.14)$$

E, assim, a equação (3.13) é reescrita como

$$\tilde{c}(\nu, l; n', k) = \tilde{r}_f[l, k] d_l^\dagger \frac{d_l \kappa p_{t,3}(\nu)}{\rho + d_l \kappa p_{t,3}(\nu)} \phi(\nu; n'),$$

onde foi denotado $\phi(\nu; n') = \exp\left(j2\pi \frac{n'}{M_t} \nu\right)$.

Com $p_{t,2}(\nu)$ tendo suporte $[-\nu_{d,2}, \nu_{d,2}]$, segue então que $p_{t,3}(\nu)$ é limitado a $[-\nu_{d,3}, \nu_{d,3}]$, em que $\nu_{d,3} = M_t \nu_{d,2}$.

Seja $\Phi(\nu)$ a matriz diagonal de elementos

$$\Phi_l(\nu) = \frac{d_l \kappa p_{t,3}(\nu)}{\rho + d_l \kappa p_{t,3}(\nu)}. \quad (3.15)$$

Desta forma, temos

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_2^H(\nu; n', k) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathbf{c}_2^H[m; n', k] \exp(j2\pi m \nu) \\ &= \tilde{\mathbf{c}}_2^H(\nu; n', k) \mathbf{U}^H \\ &= \tilde{\mathbf{r}}_f^H[k] \mathbf{D}^\dagger \phi^*(\nu; n') \Phi(\nu) \mathbf{U}^H \\ &= \mathbf{r}_f^H[k] \mathbf{U} \mathbf{D}^\dagger \phi^*(\nu; n') \Phi(\nu) \mathbf{U}^H. \end{aligned} \quad (3.16)$$

A partir dos N_c vetores $\mathbf{c}_2(\nu; n', k)$, é definido

$$\mathbf{C}(\nu; n') = (\mathbf{c}_2(\nu; n', 0), \dots, \mathbf{c}_2(\nu; n', N_c - 1))^H,$$

e daí

$$\begin{aligned} \mathbf{C}(\nu; n') &= (\mathbf{r}_f[0], \dots, \mathbf{r}_f[N_c - 1])^H \mathbf{U} \mathbf{D}^\dagger \phi^*(\nu; n') \Phi(\nu) \mathbf{U}^H \\ &= \tilde{\mathbf{R}}_f \mathbf{U} \mathbf{D}^\dagger \phi^*(\nu; n') \Phi(\nu) \mathbf{U}^H \\ &= \tilde{\mathbf{R}}_f \mathbf{R}_f^{-1} \mathbf{U} \phi^*(\nu; n') \Phi(\nu) \mathbf{U}^H, \end{aligned} \quad (3.17)$$

em que $\tilde{\mathbf{R}}_f = (\mathbf{r}_f[0], \dots, \mathbf{r}_f[N_c - 1])^H$.

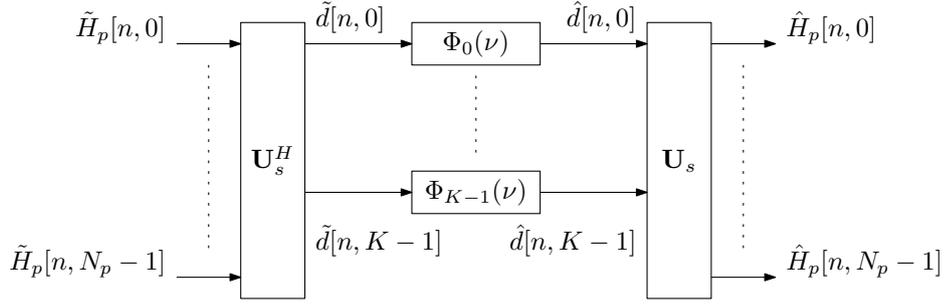


Figura 3.3: Estimação das sub-portadoras piloto baseada no critério MMSE.

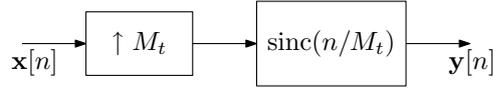


Figura 3.4: Interpolador passa-baixa.

A equação (3.17) fornece três estruturas de filtragem, cada uma com sua respectiva função. A primeira

$$\mathbf{U}\Phi(\nu)\mathbf{U}^H$$

é responsável pela filtragem e eliminação do ruído das amostras $\tilde{H}[mM_t, lM_f]$. Tal estrutura é ilustrada na figura 3.3. A matriz \mathbf{U}_s consiste das K primeiras colunas de \mathbf{U} , e também $\tilde{H}_p[n, k] = \tilde{H}[nm_t, kM_f]$. A segunda estrutura consiste nos filtros

$$\phi^*(\nu; 0), \dots, \phi^*(\nu; M_t - 1).$$

Observando que a transformada inversa de $\phi^*(\nu; n') = \exp(-j2\pi \frac{n'}{M_t} \nu)$ é $\text{sinc}(n + n'/M_t)$, vê-se que esses filtros, em conjunto, formam uma interpolação por sinc's. O filtro de interpolação é mostrado na figura 3.4. Essa estrutura pode ser implementada eficientemente por um filtro polifásico \mathbf{P} . Por fim, temos a estrutura responsável pela interpolação na frequência:

$$\tilde{\mathbf{R}}_f \mathbf{R}_f^{-1},$$

cuja entrada tem dimensão $N_p \times 1$ e a saída, $N_c \times 1$. As três estruturas, em conjunto, são mostradas na figura 3.5.

3.1.2 Estimador FIR

Na equação (3.3), o índice m assume valores sobre os inteiros. Isso leva à impossibilidade de implementação prática do filtro de Wiener resultante. A alternativa é restringir os limites que o índice m abrange. Será considerado que $m = -M, \dots, M$. Com isso,

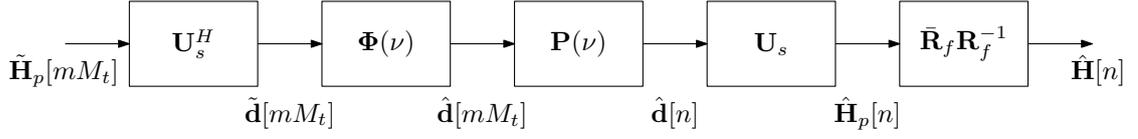


Figura 3.5: Estimador MMSE.

seguinto os mesmos passos acima, a equação (3.12) passa a ser dada agora como

$$\sum_{m_1=-M}^M d_l \kappa r_{t,2}[(m-m_1)M_t] \tilde{c}[m_1, l; n', k] - \kappa r_{t,2}[n'+mM_t] \tilde{r}_f[l, k] + \rho \tilde{c}[m, l; n', k] = 0, \quad (3.18)$$

para $m = -M, \dots, M$.

Sejam

$$\mathbf{r}_t[n'] = \begin{pmatrix} r_{t,2}[n' + M \cdot M_t] \\ \vdots \\ r_{t,2}[n' - M \cdot M_t] \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{c}}_1[l; n', k] = \begin{pmatrix} \tilde{c}[M, l; n', k] \\ \vdots \\ \tilde{c}[-M, l; n', k] \end{pmatrix}$$

e

$$\mathbf{R}_t = (\mathbf{r}_t[-M \cdot M_t], \dots, \mathbf{r}_t[M \cdot M_t]).$$

Deste modo, a equação (3.18) em sua forma vetorial é dada como

$$d_l \kappa \mathbf{R}_t \tilde{\mathbf{c}}_1[l; n', k] - \kappa \mathbf{r}_t[n'] \tilde{r}_f[l, k] + \rho \tilde{\mathbf{c}}_1[l; n', k] = 0.$$

Então, temos

$$\tilde{\mathbf{c}}_1[l; n', k] = \tilde{r}_f[l, k] d_l^\dagger \{ (d_l \kappa \mathbf{R}_t + \rho \mathbf{I})^{-1} d_l \kappa \mathbf{r}_t[n'] \}.$$

Seja

$$\mathbf{c}[l; n'] = (d_l \kappa \mathbf{R}_t + \rho \mathbf{I})^{-1} d_l \kappa \mathbf{r}_t[n'], \quad (3.19)$$

cujos elementos são $c[m, l; n']$, para $m = -M, \dots, M$. Deste modo, podemos escrever

$$\tilde{c}(\nu, l; n', k) = \tilde{r}_f[l, k] d_l^\dagger c(\nu, l; n'),$$

em que

$$c(\nu, l; n') = \sum_{m=-M}^M c[m, l; n'] \exp(-j2\pi m\nu)$$

Seguinto os mesmos passos como na derivação do filtro de Wiener de ordem infinita, e com as mesmas definições, chegamos a

$$\mathbf{C}(\nu; n') = \tilde{\mathbf{R}}_f \mathbf{R}_f^{-1} \mathbf{U} \Phi^*(\nu; n') \mathbf{U}^H, \quad (3.20)$$

em que $\Phi(\nu; n')$ é matriz diagonal de elementos

$$\Phi_l(\nu; n') = c(\nu, l; n').$$

A equação (3.20) corresponde à equação (3.17) no caso do filtro de Wiener de ordem infinita. A diferença agora é que no filtro de Wiener FIR não é possível separar $\Phi(\nu; n')$, enquanto que no caso infinito bastava fazer a estimativa das sub-portadoras piloto e depois realizar o processo de interpolação no tempo. Pode-se contornar essa problemática escolhendo M suficientemente grande de modo que a correlação $r_{t,2}[mM_t]$ seja desprezível para $|m| > M$. E, assim, realiza-se o mesmo processo de filtragem como no caso do filtro de Wiener IIR, bastando fazer as estimativas das sub-portadoras piloto e depois aplicar uma interpolação que não dependa das correlações do canal. De fato, é esse o procedimento de estimação que será adotado aqui.

3.1.3 Cálculo do MMSE

O erro médio de estimação na k -ésima sub-portadora piloto é dado por

$$\text{MMSE}[k] = \mathbb{E}\{|\hat{H}[n, k] - H[n, k]|^2\}. \quad (3.21)$$

Usando o princípio da ortogonalidade dado na equação (3.5), e substituindo a equação (3.3) em (3.21), temos

$$\begin{aligned} \text{MMSE}[k] &= \kappa\sigma_h^2 - \mathbb{E}\{H^*[n, k]\hat{H}[n, k]\} \\ &= \kappa - \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{l=(k-k'-N_c)/M_f+1}^{(k-k')/M_f} c[m, l; n', k] r_H^*[n' + mM_t, k' + lM_f]. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Com a propriedade $r_H[n' + mM_t, k' + lM_f] = \kappa r_{t,2}[n' + mM_t] r_f[k' + lM_f]$, e das definições de $\mathbf{c}_2[m; n', k]$ e $\mathbf{r}_f[k]$ dadas na equação (3.9), obtemos

$$\text{MMSE}[k] = \kappa - \sum_{m=-\infty}^{\infty} \kappa r_{t,2}^*[n' + mM_t] \mathbf{r}_f^H[k] \mathbf{c}_2[m; n', k].$$

Reconhecendo

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \kappa r_{t,2}^*[n' + mM_t] \mathbf{c}_2[m; n', k] = \int_{-1/2}^{1/2} \kappa p_{t,3}^*(\nu; n') \mathbf{c}_2(\nu; n', k) d\nu,$$

e com o uso da equação (3.16), temos

$$\begin{aligned} \text{MMSE}[k] &= \kappa - \int_{-1/2}^{1/2} \kappa p_{t,3}^*(\nu; n') \mathbf{r}_f^H[k] \mathbf{c}_2(\nu; n', k) d\nu \\ &= \kappa - \mathbf{r}_f^H[k] \mathbf{U}^H \mathbf{\Phi}_1 \mathbf{U} \mathbf{R}_f^{-1} \mathbf{r}_f[k], \end{aligned} \quad (3.23)$$

em que foi definida a matriz diagonal

$$\mathbf{\Phi}_1 = \int_{-1/2}^{1/2} \kappa p_{t,3}^*(\nu) \mathbf{\Phi}(\nu) d\nu.$$

Perceba acima que o MMSE só depende de k . De fato, não foi necessário inserir o índice n' em $\text{MMSE}[k]$.

Seja

$$\mathbf{MMSE} = (\text{MMSE}[0], \text{MMSE}[M_f], \dots, \text{MMSE}[N_c - M_f])^T.$$

Deste modo, a partir da equação (3.23), temos

$$\begin{aligned} \mathbf{MMSE} &= \kappa \mathbf{I} - \text{diag}(\mathbf{R}_f^H \mathbf{U}^H \mathbf{\Phi}_1 \mathbf{U} \mathbf{R}_f^{-1} \mathbf{R}_f) \\ &= \kappa \mathbf{I} - \text{diag}(\mathbf{U}^H \mathbf{D} \mathbf{\Phi}_1 \mathbf{U}) \\ &= \text{diag}(\mathbf{U}^H \mathbf{\Phi} \mathbf{U}), \end{aligned}$$

em que foi denotado

$$\mathbf{\Phi} = \kappa \mathbf{I} - \mathbf{D} \mathbf{\Phi}_1,$$

cujo l -ésimo elemento da matriz diagonal $\mathbf{\Phi}$ pode ser escrito como

$$\begin{aligned} \Phi_l &= \kappa - d_l \int_{-1/2}^{1/2} \kappa p_{t,3}^*(\nu) \left[1 - \frac{\rho}{\rho + d_l \kappa p_{t,3}(\nu)} \right] d\nu \\ &= \kappa - d_l \kappa + \int_{-1/2}^{1/2} \frac{\rho d_l \kappa p_{t,3}(\nu)}{\rho + d_l \kappa p_{t,3}(\nu)} d\nu. \end{aligned}$$

Então, definindo o “MMSE médio” sobre as sub-portadoras piloto como

$$\overline{\text{MMSE}} = \frac{1}{N_p} \sum_{k=0}^{N_p-1} \text{MMSE}[k \cdot M_f]$$

temos, então,

$$\begin{aligned}\overline{\text{MMSE}} &= \frac{1}{N_p} \text{tr}(\mathbf{U}^H \mathbf{\Phi} \mathbf{U}) = \frac{1}{N_p} \sum_{l=0}^{N_p-1} \Phi_l \\ &= \frac{1}{N_p} \sum_{l=0}^{N_p-1} \int_{-1/2}^{1/2} \frac{\rho d_l \kappa p_{t,3}(\nu)}{\rho + d_l \kappa p_{t,3}(\nu)} d\nu,\end{aligned}\quad (3.24)$$

em que foi usado $\sum_{l=0}^{N_p-1} d_l = N_p$.

Agora vamos derivar um limite superior para $\overline{\text{MMSE}}$ entre as funções passa-baixas $p_{t,3}(\nu)$ de suporte limitado $[-\nu_{d,3}, \nu_{d,3}]$, que satisfazem

$$\int_{-\nu_{d,3}}^{\nu_{d,3}} p_{t,3}(\nu) d\nu = 1.$$

Pela desigualdade de Cauchy-Schwartz, obtemos

$$\begin{aligned}\int_{-\nu_{d,3}}^{\nu_{d,3}} \frac{1}{|\rho + d_l \kappa p_{t,3}(\nu)|} d\nu \int_{-\nu_{d,3}}^{\nu_{d,3}} |\rho + d_l \kappa p_{t,3}(\nu)| d\nu &\geq \\ &\geq \left| \int_{-\nu_{d,3}}^{\nu_{d,3}} \frac{1}{|\rho + d_l \kappa p_{t,3}(\nu)|^{1/2}} \cdot |\rho + d_l \kappa p_{t,3}(\nu)|^{1/2} d\nu \right|^2 = 4\nu_{d,3}^2,\end{aligned}\quad (3.25)$$

e, daí,

$$\int_{-\nu_{d,3}}^{\nu_{d,3}} \frac{1}{\rho + d_l \kappa p_{t,3}(\nu)} d\nu \geq \frac{4\nu_{d,3}^2}{2\nu_{d,3}\rho + d_l \kappa}.$$

A integral na equação (3.24) satisfaz então a desigualdade

$$\begin{aligned}\int_{-1/2}^{1/2} \frac{\rho d_l \kappa p_{t,3}(\nu)}{\rho + d_l \kappa p_{t,3}(\nu)} d\nu &= 2\nu_{d,3}\rho - \int_{\nu_{d,3}}^{\nu_{d,3}} \frac{\rho^2}{\rho + d_l \kappa p_{t,3}(\nu)} d\nu \\ &\leq 2\nu_{d,3}\rho - \frac{4\nu_{d,3}^2 \rho^2}{2\nu_{d,3}\rho + d_l \kappa} \\ &= \frac{2\nu_{d,3}\rho d_l \kappa}{2\nu_{d,3}\rho + d_l \kappa}.\end{aligned}\quad (3.26)$$

Chegamos ao seguinte limite superior:

$$\begin{aligned}\overline{\text{MMSE}} &\leq \frac{1}{N_p} \sum_{l=0}^{N_p-1} \frac{2\nu_{d,3}\rho d_l \kappa}{2\nu_{d,3}\rho + d_l \kappa} \\ &\leq \frac{1}{N_p} \sum_{l=0}^{K-1} 2\nu_{d,3}\rho \\ &= 2\nu_{d,3}\rho \frac{K}{N_p}.\end{aligned}$$

em que foi usado $2\nu_{d,3}d_l \kappa / (2\nu_{d,3}\rho + d_l \kappa) \leq 2\nu_{d,3}$, para $d_l \neq 0$.

Deseja-se saber qual função passa-baixa $p_{t,3}(\nu)$ geraria o máximo $\overline{\text{MMSE}}$ para κ dado.

A desigualdade da equação (3.25) é substituída por uma igualdade quando existem constantes C_1 e C_2 tais que

$$C_1 \frac{1}{|\rho + d_l \kappa p_{t,3}(\nu)|} = C_2 |\rho + d_l \kappa p_{t,3}(\nu)|,$$

ou

$$|\rho + d_l \kappa p_{t,3}(\nu)| = \text{const.}$$

E, assim, conclui-se que $p_{t,3}(\nu)$ deve ser uma função passa-baixa uniforme. Seja $p_{B,3}(\nu)$ a densidade espectral de potência da função passa-baixa de largura $2\nu_{d,3}$ dada por

$$p_{B,3}(\nu) = \begin{cases} \frac{1}{2\nu_{d,3}}, & \text{se } |\nu| \leq \nu_{d,3}, \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

Segundo as equações (3.14) e (2.22), temos

$$\begin{aligned} \kappa p_{t,3}(\nu) &= \frac{1}{M_t} p_{t,2}\left(\frac{\nu}{M_t}\right) \\ &= \frac{1}{N_s M_t} p_{t,1}\left(\frac{\nu}{N_s M_t}\right) m_t\left(\frac{\nu}{N_s M_t}\right). \end{aligned}$$

Com a função passa-baixa $p_{B,3}(\nu)$ no lugar de $p_{t,3}(\nu)$, obtemos

$$\frac{1}{N_s M_t} p_{t,1}\left(\frac{\nu}{N_s M_t}\right) = \frac{\kappa}{2\nu_{d,3}} \frac{1}{m_t(\nu/N_s M_t)}. \quad (3.27)$$

Junto com a restrição

$$\int_{-\nu_{d,1}}^{\nu_{d,1}} p_{t,1}(\nu) d\nu = 1,$$

a integral da equação (3.27) resulta em

$$\int_{-\nu_{d,1}}^{\nu_{d,1}} \frac{\kappa}{2\nu_{d,1}} \frac{1}{m_t(\nu)} d\nu = 1,$$

ou

$$\kappa = 2\nu_{d,1} \left(\int_{-\nu_{d,1}}^{\nu_{d,1}} \frac{1}{m_t(\nu)} d\nu \right)^{-1}.$$

Isso nos diz que somente para um valor de κ é obtida uma igualdade na equação (3.26).

Formulamos o seguinte problema:

$$\text{maximize: } \int_{-\nu_{d,1}}^{\nu_{d,1}} \frac{\rho' d_l m_t(\nu) y(\nu)}{\rho' + d_l m_t(\nu) y(\nu)} d\nu; \quad (3.28)$$

$$\text{restrito a: } \int_{-\nu_{d,1}}^{\nu_{d,1}} m_t(\nu) y(\nu) d\nu = \kappa, \quad (3.29)$$

$$\int_{-\nu_{d,1}}^{\nu_{d,1}} y(\nu) d\nu = 1, \quad (3.30)$$

em que $\rho' = \rho N_s M_t$ e $y(\nu)$ faz o papel de $p_{t,1}(\nu)$. Conforme o apêndice A, a solução desse problema por multiplicadores de Lagrange leva a

$$-\frac{d_l m_t(\nu)}{[\rho' + d_l m_t(\nu) y(\nu)]^2} + \lambda_1 m_t(\nu) + \lambda_2 = 0 \quad (3.31)$$

ou

$$y(\nu) = \left[\left(\frac{d_l m_t(\nu)}{\lambda_1 m_t(\nu) + \lambda_2} \right)^{1/2} - \rho' \right] \frac{1}{d_l m_t(\nu)}$$

onde λ_1 e λ_2 são escolhidos de modo a $y(\nu)$ satisfazer as restrições dadas nas equações (3.29) e (3.30).

A solução $y(\nu)$ será empregada no estimador robusto, em que o $\overline{\text{MMSE}}$ das estimativas não depende da estatística do canal.

3.2 Estimador Robusto

Para que se tenha a estimativa ótima do canal, como foi visto na seção anterior, é necessário que se conheça as correlações do canal tanto no tempo como na frequência, o que muitas vezes não é possível na prática. Por outro lado, a estimativa da correlação do canal demanda uma grande complexidade computacional. E além disso, a estatística do canal pode mudar com o tempo. Uma solução sub-ótima é fazer uma escolha arbitrária para as correlações $r_{t,3}[n]$ e $r_f[n]$ que, mesmo não coincidindo com as correlações verdadeiras, levam, para os casos de interesse, a uma performance próxima à estimação ótima. Tal estimador é então dito robusto no sentido de não depender da estatística do canal. Quando o filtro de Wiener adota correlações diferentes das reais, dizemos que o filtro está descasado.

No que segue, será somente considerada a estimação das sub-portadoras piloto, i.e.,

estaremos interessados somente na estrutura de filtragem

$$\begin{aligned}\mathbf{C}(\nu) &= \mathbf{C}(\nu; 0) \\ &= \mathbf{U}\Phi(\nu)\mathbf{U}^H.\end{aligned}\quad (3.32)$$

Por simplificação, será usado $c[m, l; k]$ no lugar de $c[m, l; 0, kM_t]$, para $k = 0, \dots, N_p - 1$.

3.2.1 Análise de Descasamento

Na análise que segue, a abordagem será relativa ao filtro de Wiener IIR. Sejam $\bar{r}_{t,3}[n]$ e $\bar{r}_f[n]$ as correlações usadas no filtro cujos coeficientes $\bar{c}[m, l; k]$ são determinados por

$$\bar{\mathbf{C}}(\nu) = \bar{\mathbf{U}}\bar{\Phi}(\nu)\bar{\mathbf{U}}^H, \quad (3.33)$$

onde $\bar{\mathbf{U}}$, $\bar{\Phi}(\nu)$ e $\bar{\mathbf{C}}(\nu)$ são dados como nas equações (3.11), (3.15) e (3.32), respectivamente, com a diferença de que $\bar{r}_{t,3}[n]$ e $\bar{r}_f[n]$ são postos no lugar de $r_{t,3}[n]$ e $r_f[n]$.

O erro quadrático médio de estimação gerado pelo filtro de coeficientes $\bar{c}[m, l; k]$ é dado por

$$\begin{aligned}\overline{\text{MSE}}(\{\bar{c}[m, l; k]\}) &= \frac{1}{N_p} \sum_{k=0}^{N_p-1} \left\{ \sum_{m_1, m_2=-\infty}^{\infty} \sum_{l_1, l_2=k-N_p+1}^k (\bar{c}[m_2, l_2; k] + \delta[m_2, l_2]) \right. \\ &\quad \cdot \bar{r}_H[(m_1 - m_2)M_t, (l_1 - l_2)M_f] (\bar{c}^*[m_1, l_1; k] + \delta[m_1, l_1]) \\ &\quad \left. + \sum_{m_1, m_2=-\infty}^{\infty} \sum_{l_1, l_2=k-N_p+1}^k \rho |\bar{c}[m, l; k]|^2 \right\} \\ &= \frac{1}{N_p} \sum_{m_1, m_2=-\infty}^{\infty} \kappa r_{t,3}[m_1 - m_2] \text{tr}\{(\bar{\mathbf{C}}[m_1] - \delta[m_1]\mathbf{I})^H \mathbf{R}_f \\ &\quad \cdot (\bar{\mathbf{C}}[m_2] - \delta[m_2]\mathbf{I})\} + \frac{1}{N_p} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \rho \text{tr}\{\bar{\mathbf{C}}^H[m]\bar{\mathbf{C}}[m]\} \\ &= \frac{1}{N_p} \int_{-1/2}^{1/2} \kappa p_{t,3}(\nu) \text{tr}\{(\bar{\mathbf{C}}(\nu) - \mathbf{I})^H \mathbf{R}_f (\bar{\mathbf{C}}(\nu) - \mathbf{I})\} d\nu \\ &\quad + \frac{1}{N_p} \int_{-1/2}^{1/2} \rho \text{tr}\{\bar{\mathbf{C}}^H(\nu)\bar{\mathbf{C}}(\nu)\} d\nu,\end{aligned}$$

em que $\delta[m_1, m_2] = \delta[m_1]\delta[m_2]$ e

$$\delta[n] = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 0, \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

Com a substituição de $\bar{\mathbf{C}}(\nu)$ dado na equação (3.33), obtemos

$$\begin{aligned}
\overline{\text{MSE}}(\{\bar{c}[m, l; k]\}) &= \frac{1}{N_p} \int_{-1/2}^{1/2} \kappa p_{t,3}(\nu) \text{tr}\{(\bar{\mathbf{U}}\bar{\Phi}(\nu)\bar{\mathbf{U}}^H - \mathbf{I})^H \mathbf{R}_f (\bar{\mathbf{U}}\bar{\Phi}(\nu)\bar{\mathbf{U}}^H - \mathbf{I})\} d\nu \\
&\quad + \frac{1}{N_p} \int_{-1/2}^{1/2} \rho \text{tr}\{\bar{\mathbf{U}}\bar{\Phi}^H(\nu)\bar{\mathbf{U}}^H \bar{\mathbf{U}}\bar{\Phi}(\nu)\bar{\mathbf{U}}^H\} d\nu \\
&= \frac{1}{N_p} \int_{-1/2}^{1/2} \kappa p_{t,3}(\nu) \text{tr}\{\bar{\mathbf{U}}^H \mathbf{R}_f \bar{\mathbf{U}}(\bar{\Phi}(\nu) - \mathbf{I})(\bar{\Phi}(\nu) - \mathbf{I})^H\} d\nu \\
&\quad + \frac{1}{N_p} \int_{-1/2}^{1/2} \rho \text{tr}\{\bar{\Phi}^H(\nu)\bar{\Phi}(\nu)\} d\nu
\end{aligned} \tag{3.34}$$

3.2.2 Derivação do Estimador Robusto

Inicialmente, será assumido que o estimador é perfeitamente casado na frequência, i.e., os coeficientes $\bar{c}[m, l; k]$ foram selecionados a partir da forma

$$\mathbf{R}_f = \mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{U}^H, \tag{3.35}$$

em que os elementos da matriz diagonal \mathbf{D} são dados por

$$(\mathbf{D})_{ll} = \begin{cases} d_l, & \text{se } 0 \leq l \leq K - 1, \\ 0, & \text{se } K \leq l \leq N_p - 1, \end{cases} \tag{3.36}$$

Para cada l , escolhamos um $\bar{p}_{t,3}(\nu; l)$ de modo que

$$\bar{\Phi}_l(\nu) = \frac{d_l \bar{\kappa} \bar{p}_{t,3}(\nu; l)}{\rho + d_l \bar{\kappa} \bar{p}_{t,3}(\nu; l)}. \tag{3.37}$$

Com isso, a equação (3.34) se simplifica como

$$\begin{aligned}
\overline{\text{MSE}}(\{\bar{c}[m, l; k]\}) &= \frac{1}{N_p} \sum_{l=0}^{N_p} d_l \int_{-1/2}^{1/2} \kappa p_{t,3}(\nu) |\bar{\Phi}_l(\nu) - 1|^2 d\nu + \frac{1}{N_p} \sum_{l=0}^{N_p} \rho \int_{-1/2}^{1/2} |\bar{\Phi}_l(\nu)|^2 d\nu \\
&= \frac{1}{N_p} \sum_{l=0}^{N_p} d_l \int_{-1/2}^{1/2} \{\kappa p_{t,3}(\nu) - \bar{\kappa} \bar{p}_{t,3}(\nu; l)\} |\bar{\Phi}_l(\nu) - 1|^2 d\nu \\
&\quad + \frac{1}{N_p} \sum_{l=0}^{N_p} d_l \int_{-1/2}^{1/2} \bar{\kappa} \bar{p}_{t,3}(\nu; l) |\bar{\Phi}_l(\nu) - 1|^2 d\nu + \frac{1}{N_p} \sum_{l=0}^{N_p} \rho \int_{-1/2}^{1/2} |\bar{\Phi}_l(\nu)|^2 d\nu \\
&= \frac{1}{N_p} \sum_{l=0}^{N_p} d_l \int_{-1/2}^{1/2} \{\kappa p_{t,3}(\nu) - \bar{\kappa} \bar{p}_{t,3}(\nu; l)\} |\bar{\Phi}_l(\nu) - 1|^2 d\nu + \overline{\text{MMSE}}.
\end{aligned} \tag{3.38}$$

O primeiro termo à direita da última igualdade na equação acima é interpretado como o $\overline{\text{MSE}}$ residual devido ao descasamento. A performance do estimador não depende das correlações do canal no tempo quando o $\overline{\text{MSE}}$ residual é nulo. Com o uso explícito de $\bar{\Phi}_l(\nu)$ dado como na equação (3.37), temos

$$\begin{aligned} \overline{\text{MSE}}(\{\bar{c}[m, l; k]\}) &= \frac{1}{N_p} \sum_{l=0}^{N_p} \int_{-1/2}^{1/2} d_l \{ \kappa p_{t,3}(\nu) - \bar{\kappa} \bar{p}_{t,3}(\nu; l) \} \\ &\quad \cdot \left| \frac{d_l \bar{\kappa} \bar{p}_{t,3}(\nu; l)}{\rho + d_l \bar{\kappa} \bar{p}_{t,3}(\nu; l)} - 1 \right|^2 d\nu + \overline{\text{MMSE}} \\ &= \frac{1}{N_p} \sum_{l=0}^{N_p} d_l \rho^2 \int_{-1/2}^{1/2} \frac{\kappa p_{t,3}(\nu) - \bar{\kappa} \bar{p}_{t,3}(\nu; l)}{[\rho + d_l \bar{\kappa} \bar{p}_{t,3}(\nu; l)]^2} d\nu + \overline{\text{MMSE}} \end{aligned} \quad (3.39)$$

Da equação (2.22), podemos escrever

$$\begin{aligned} \kappa p_{t,3}(\nu) &= \frac{1}{N_s M_t} p_{t,1} \left(\frac{\nu}{N_s M_t} \right) m_t \left(\frac{\nu}{N_s M_t} \right) \\ \bar{\kappa} \bar{p}_{t,3}(\nu; l) &= \frac{1}{N_s M_t} \bar{p}_{t,1} \left(\frac{\nu}{N_s M_t} \right) m_t \left(\frac{\nu}{N_s M_t} \right), \end{aligned}$$

cuja substituição na equação (3.39) resulta em

$$\begin{aligned} \overline{\text{MSE}}(\{\bar{c}[m, l; k]\}) &= \frac{1}{N_p} \sum_{l=0}^{N_p} \rho^2 \int_{-1/2}^{1/2} [p_{t,1}(\nu) - \bar{p}_{t,1}(\nu; l)] \cdot \\ &\quad \frac{d_l m_t(\nu)}{[\rho + d_l \bar{p}_{t,1}(\nu; l) m_t(\nu)]^2} d\nu + \overline{\text{MMSE}}, \end{aligned}$$

em que $\rho' = \rho N_s M_t$. Com a suposição de que $\bar{p}_{t,1}(\nu; l)$ foi escolhido de forma a satisfazer a equação (3.31), o $\overline{\text{MSE}}$ residual resulta em

$$\begin{aligned} \frac{1}{N_p} \sum_{l=0}^{N_p} \rho^2 \int_{-1/2}^{1/2} [p_{t,1}(\nu) - \bar{p}_{t,1}(\nu; l)] (\lambda_1 m_t(\nu) + \lambda_2) d\nu = \\ \frac{1}{N_p} \sum_{l=0}^{N_p} \rho^2 \left\{ \lambda_1 \int_{-1/2}^{1/2} p_{t,1}(\nu) m_t(\nu) d\nu - \lambda_1 \int_{-1/2}^{1/2} \bar{p}_{t,1}(\nu; l) m_t(\nu) d\nu + \right. \\ \left. \lambda_2 \int_{-1/2}^{1/2} p_{t,1}(\nu) d\nu - \lambda_2 \int_{-1/2}^{1/2} \bar{p}_{t,1}(\nu; l) d\nu \right\} = \frac{1}{N_p} \sum_{l=0}^{N_p} \rho^2 \lambda_1 (\kappa - \bar{\kappa}), \end{aligned}$$

onde foram usadas as restrições

$$\begin{aligned} \int_{-1/2}^{1/2} p_{t,1}(\nu) m_t(\nu) d\nu &= \kappa, & \int_{-1/2}^{1/2} p_{t,1}(\nu) d\nu &= 1, \\ \int_{-1/2}^{1/2} \bar{p}_{t,1}(\nu; l) m_t(\nu) d\nu &= \bar{\kappa}, & \int_{-1/2}^{1/2} \bar{p}_{t,1}(\nu; l) d\nu &= 1. \end{aligned}$$

Com a suposição de que $\bar{\kappa} = \kappa$, chegamos a

$$\overline{\text{MSE}}(\{\bar{c}[m, l; k]\}) = \overline{\text{MMSE}}.$$

Ainda pode-se anular o $\overline{\text{MSE}}$ residual enfraquecendo as restrições dadas pelas equações (3.29)-(3.30) e assumindo que existem λ_1 e λ_2 tais que

$$\frac{d_l m_t(\nu)}{[\rho' + d_l m_t(\nu) y(\nu; l)]^2} = \lambda_1 m_t(\nu) + \lambda_2, \quad (3.40)$$

com $y(\nu; l) = \bar{p}_{t,1}(\nu; l)$.

Temos os seguintes casos:

1. Se $\lambda_1 = 0$. Não importando qual o valor de $\bar{\kappa}$, o $\overline{\text{MSE}}$ residual sempre será nulo.

Temos

$$y(\nu; l) = \left[\left(\frac{d_l}{\lambda_2} m_t(\nu) \right)^{1/2} - \rho' \right] \frac{1}{d_l m_t(\nu)}. \quad (3.41)$$

Devemos selecionar um λ_2 de modo que a restrição (3.30) seja satisfeita. A restrição (3.30) implica

$$\int_{-\nu_{d,1}}^{\nu_{d,1}} \left[\left(\frac{d_l}{\lambda_2} m_t(\nu) \right)^{1/2} - \rho' \right] \frac{1}{d_l m_t(\nu)} d\nu = 1,$$

ou

$$\frac{1}{\sqrt{d_l \lambda_2}} \int_{-\nu_{d,1}}^{\nu_{d,1}} \frac{1}{\sqrt{m_t(\nu)}} d\nu - \frac{\rho'}{d_l} \int_{-\nu_{d,1}}^{\nu_{d,1}} \frac{1}{m_t(\nu)} d\nu = 1,$$

e, portanto,

$$\lambda_2 = \frac{1}{d_l} \left(\frac{I_1}{1 + \frac{\rho'}{d_l} I_2} \right)^2, \quad (3.42)$$

em que

$$I_1 = \int_{-\nu_{d,1}}^{\nu_{d,1}} \frac{1}{\sqrt{m_t(\nu)}} d\nu \quad I_2 = \int_{-\nu_{d,1}}^{\nu_{d,1}} \frac{1}{m_t(\nu)} d\nu.$$

Deste modo, temos

$$\begin{aligned} \bar{p}_{t,3}(\nu; l) &= \bar{\kappa}^{-1} y(\nu/N_s M_t; l) m_t(\nu/N_s M_t) \\ &= \bar{\kappa}^{-1} \left[\left\{ \frac{d_l}{\lambda_2} m_t \left(\frac{\nu}{N_s M_t} \right) \right\}^{1/2} - \rho' \right] \frac{1}{d_l m_t(\nu/N_s M_t)} m_t \left(\frac{\nu}{N_s M_t} \right) \\ &= \bar{\kappa}^{-1} \left[\frac{1}{I_1} \left(1 + \frac{\rho'}{d_l} I_2 \right) m_t^{1/2} \left(\frac{\nu}{N_s M_t} \right) - \frac{\rho'}{d_l} \right]. \end{aligned} \quad (3.43)$$

Do $\overline{\text{MMSE}}$ dado na equação (3.38), e após simplificações cujo resultado é similar à

equação (3.24), temos

$$\begin{aligned}\overline{\text{MMSE}} &= \frac{1}{N_p} \sum_{l=0}^{K-1} \int_{-\nu_{d,3}}^{\nu_{d,3}} \frac{\rho d_l \bar{\kappa} \bar{p}_{t,3}(\nu; l)}{\rho + d_l \bar{\kappa} \bar{p}_{t,3}(\nu; l)} d\nu \\ &= \frac{1}{N_p} \sum_{l=0}^{K-1} \int_{-\nu_{d,1}}^{\nu_{d,1}} \frac{\rho' d_l m_t(\nu) y(\nu; l)}{\rho' + d_l m_t(\nu) y(\nu; l)} d\nu.\end{aligned}$$

Agora, com a substituição de $y(\nu; l)$ dado na equação (3.41), obtemos

$$\begin{aligned}\overline{\text{MMSE}} &= \frac{1}{N_p} \sum_{l=0}^{K-1} \int_{-\nu_{d,1}}^{\nu_{d,1}} \frac{\rho' ([\frac{d_l}{\lambda_2} m_t(\nu)]^{1/2} - \rho')}{[\frac{d_l}{\lambda_2} m_t(\nu)]^{1/2}} d\nu \\ &= \frac{1}{N_p} \sum_{l=0}^{K-1} \int_{-\nu_{d,1}}^{\nu_{d,1}} \rho' (1 - \rho' [\frac{d_l}{\lambda_2} m_t(\nu)]^{-1/2}) d\nu.\end{aligned}$$

Substituindo λ_2 dado na equação (3.42), chegamos a

$$\overline{\text{MMSE}} = 2\nu_{d,3} \rho \frac{K}{N_p} - \frac{1}{N_p} \sum_{l=0}^{K-1} \frac{\rho'^2 I_1^2}{\rho' I_2 + d_l}.$$

2. Se $\lambda_2 = 0$. Temos

$$y(\nu; l) = \left[\left(\frac{d_l}{\lambda_1} \right)^{1/2} - \rho' \right] \frac{1}{d_l m_t(\nu)}. \quad (3.44)$$

Para que o $\overline{\text{MSE}}$ residual seja anulado, deve-se selecionar um λ_2 de modo que a restrição (3.29) seja satisfeita. Conseqüentemente,

$$\bar{\kappa} = \int_{-\nu_{d,1}}^{\nu_{d,1}} y(\nu; l) m_t(\nu) d\nu = 2\nu_{d,1} \left(\frac{1}{\sqrt{d_l \lambda_1}} - \frac{\rho'}{d_l} \right),$$

e, assim,

$$\lambda_1 = \frac{1}{d_l (\bar{\kappa}/2\nu_{d,1} + \rho'/d_l)^2}.$$

A substituição de λ_1 na equação (3.44) leva a

$$y(\nu; l) = \frac{1}{2\nu_{d,1}} \frac{\bar{\kappa}}{m_t(\nu)}.$$

Portanto,

$$\bar{p}_{t,3}(\nu; l) = \frac{1}{2\nu_{d,3}}. \quad (3.45)$$

Então, podemos escrever

$$\begin{aligned}\overline{\text{MMSE}} &= \frac{1}{N_p} \sum_{l=0}^{K-1} \int_{-\nu_{d,3}}^{\nu_{d,3}} \frac{\rho d_l \kappa \bar{p}_{t,3}(\nu; l)}{\rho + d_l \kappa \bar{p}_{t,3}(\nu; l)} d\nu \\ &= \frac{1}{N_p} \sum_{l=0}^{K-1} \rho \int_{-\nu_{d,3}}^{\nu_{d,3}} \left(1 - \frac{\rho}{\rho + d_l \kappa \bar{p}_{t,3}(\nu; l)}\right) d\nu.\end{aligned}$$

Substituindo o $\bar{p}_{t,3}(\nu; l)$ encontrado a equação (3.45), temos

$$\overline{\text{MMSE}} = 2\nu_{d,3} \rho \frac{K}{N_p} - \frac{1}{N_p} \sum_{l=0}^{K-1} \frac{\rho^2 (2\nu_{d,3})^2}{\rho (2\nu_{d,3}) + d_l \kappa}.$$

O estimadores encontrados acima são robustos apenas no sentido de que suas performance, medidas pelo $\overline{\text{MSE}}$, não dependem das correlações do canal no tempo, dadas por $r_{t,3}[n]$. Porém, é necessário que se conheça \mathbf{R}_f e ρ . Para eliminar a dependência por \mathbf{R}_f , escrevemos

$$\bar{\mathbf{R}}_f = \mathbf{F} \bar{\mathbf{D}} \mathbf{F}^H,$$

em que \mathbf{F} é a matriz de Fourier normalizada e

$$(\bar{\mathbf{D}})_l = \begin{cases} N_p/L, & \text{se } 0 \leq l \leq L-1, \\ 0, & \text{se } L \leq l \leq N_p-1, \end{cases}$$

e L é o comprimento do canal. Deste modo, a equação (3.34) se reduz a

$$\begin{aligned}\overline{\text{MSE}}(\{\bar{c}[m, l; k]\}) &= \frac{1}{N_p} \int_{-1/2}^{1/2} \kappa p_{t,3}(\nu) |\bar{\Phi}(\nu) - 1|^2 \text{tr}(\mathbf{F}^H \mathbf{R}_f \mathbf{F} \cdot \mathbf{I}') d\nu \\ &\quad + \frac{L}{N_p} \int_{-1/2}^{1/2} \rho |\bar{\Phi}(\nu)|^2 d\nu,\end{aligned}$$

em que $\bar{\Phi}(\nu) = \bar{\Phi}_l(\nu)$ e $\mathbf{I}' = \text{diag}\{(\mathbf{1}_L, \mathbf{0}_{N_p-L})\}$. Sabemos que

$$H[n, k] = \sum_{l=0}^{L-1} \omega_{N_c}^{kl} \bar{h}[n, l].$$

Considerando as posições piloto kM_f , para $k = 0, \dots, N_p - 1$, obtemos

$$\begin{aligned}H[n, kM_f] &= \sum_{l=0}^{L-1} \exp\{-j2\pi(kM_f)l/N_c\} \bar{h}[n, l] \\ &= \sum_{l=0}^{L-1} \omega_{N_p}^{kl} \bar{h}[n, l],\end{aligned}$$

ou na forma vetorial

$$\mathbf{H}_p[n] = \mathbf{W}_p \bar{\mathbf{h}}^0[n],$$

em que \mathbf{W}_p é a matriz de Fourier de dimensões $N_p \times N_p$, e $\bar{\mathbf{h}}^0[n] = (\bar{h}[n, 0], \dots, \bar{h}[n, L-1], 0, \dots, 0)^T$. Com isso, chegamos a

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^H \mathbf{R}_f \mathbf{F} &= \mathbf{F}^H \mathbb{E}\{\mathbf{H}_p[n] \mathbf{H}_p^H[n]\} \mathbf{F} \\ &= N_p \mathbb{E}\{\mathbf{h}^0[n] (\mathbf{h}^0[n])^H\}, \end{aligned}$$

onde foi usado

$$\mathbf{F}^H \mathbf{H}_p[n] = \sqrt{N_p} \cdot \mathbf{h}^0[n].$$

Como $\mathbb{E}\{(\mathbf{h}^0[n])^H \mathbf{h}^0[n]\} = \sigma_h^2 = 1$, segue então que

$$\text{tr}(\mathbf{F}^H \mathbf{R}_f \mathbf{F} \cdot \mathbf{I}') = N_p.$$

Portanto, temos

$$\begin{aligned} \overline{\text{MSE}}(\{\bar{c}[m, l; k]\}) &= \int_{-1/2}^{1/2} \kappa p_{t,3}(\nu) |\bar{\Phi}(\nu) - 1|^2 d\nu + \frac{L}{N_p} \int_{-1/2}^{1/2} \rho |\bar{\Phi}(\nu)|^2 d\nu \\ &= \int_{-1/2}^{1/2} \{\kappa p_{t,3}(\nu) - \bar{\kappa} \bar{p}_{t,3}(\nu)\} |\bar{\Phi}(\nu) - 1|^2 d\nu + \overline{\text{MMSE}}. \end{aligned}$$

A análise para a escolha de $\bar{p}_{t,3}(\nu)$ é análoga à feita acima.

O estimador robusto que acabamos de derivar depende agora somente de ρ e L , pois $\bar{\Phi} = \bar{\Phi}_l$ dado na equação (3.37) é escrito em função desses parâmetros.

Como na prática os filtros devem ter duração finita, para que possam ser implementados temos que recorrer à equação (3.19), que reescrevemos abaixo para $n' = 0$:

$$\mathbf{c}[l] = \left(\mathbf{R}_t + \frac{\rho}{d_l \kappa} \mathbf{I} \right)^{-1} \mathbf{r}_t, \quad (3.46)$$

onde os índices de $\mathbf{c}[l; 0]$ e $\mathbf{r}_t[0]$ foram omitidos. As correlações encontradas nas equações (3.43) e (3.45) podem ser substituídas na equação (3.46) dada acima. Isso viabiliza um estimador FIR robusto.

Eliminamos a dependência de ρ em $\bar{p}_{t,3}(\nu; l)$ dado na equação (3.43) fazendo $\rho' = 0$, de modo a obtermos

$$\bar{p}_{t,3}(\nu) = \bar{\kappa}^{-1} I_1^{-1} m_t^{1/2}(\nu/N_s M_t). \quad (3.47)$$

Vê-se que $\bar{p}_{t,3}(\nu)$ dado na equação (3.45) não depende de ρ . A dependência por ρ dado na equação (3.46) pode ser eliminada substituindo $\rho/d_l \kappa$ por δ pequeno, de forma que a

inversa nessa equação exista. Temos

$$\mathbf{c}[l] = (\mathbf{R}_t + \delta \mathbf{I})^{-1} \mathbf{r}_t. \quad (3.48)$$

4 Estruturas Adaptativas

Do capítulo anterior, foi visto que a estrutura de filtragem do estimador MMSE sobre as sub-portadoras piloto, conforme mostra a figura 3.3, se divide em três procedimentos. Primeiro, calcula-se as componentes do vetor contendo as sub-portadoras piloto, sobre o subespaço definido por \mathbf{U}_s . Depois, as componentes são filtradas. Por fim, o vetor do sinal é calculado a partir das componentes filtradas. As estruturas adaptativas devem portanto se propor a estimar o subespaço dado por \mathbf{U}_s , e a filtrar o ruído existente nas componentes do sinal. Neste capítulo, são apresentados os algoritmos LORAF e PAST (*Projection Approximation Subspace Tracking*), responsáveis pela estimação do subespaço. A seguir, é proposto um algoritmo adaptativo, baseado em decomposição QR, capaz de filtrar o ruído nas componentes do sinal. Também é proposto um algoritmo que estima a potência da ICI mais ruído, e a dimensão do subespaço.

4.1 Estimação de Subespaço

Como estimar a matriz \mathbf{U} ? Pelo que foi visto no capítulo precedente,

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{R}}_f &= \mathbb{E}\{\tilde{\mathbf{H}}_p[n]\tilde{\mathbf{H}}_p^H[n]\} \\ &= \mathbb{E}\{\mathbf{H}_p[n]\mathbf{H}_p^H[n]\} + \mathbb{E}\{\mathbf{z}_p[n]\mathbf{z}_p^H[n]\} \\ &= \kappa\mathbf{R}_f + \rho\mathbf{I} = \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{U}^H,\end{aligned}$$

em que

$$\begin{aligned}\mathbf{H}_p[n] &= (H[nM_t, 0], H[nM_t, M_f], \dots, H[nM_t, N_c - M_f])^T \\ \tilde{\mathbf{H}}_p[n] &= (\tilde{H}[nM_t, 0], \tilde{H}[nM_t, M_f], \dots, \tilde{H}[nM_t, N_c - M_f])^T \\ \mathbf{z}_p[n] &= (z[nM_t, 0], z[nM_t, M_f], \dots, z[nM_t, N_c - M_f])^T,\end{aligned}$$

e

$$\mathbf{\Lambda} = \kappa\mathbf{D} + \rho\mathbf{I}.$$

Portando temos um problema de estimação de subespaço, onde deve-se estimar os K autovetores dominantes de \mathbf{R}_f . Podemos escrever

$$\tilde{\mathbf{R}}_f = \begin{pmatrix} \mathbf{U}_s & \mathbf{U}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{\Lambda}_s & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{\Lambda}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{U}_s & \mathbf{U}_n \end{pmatrix}^H,$$

em que

$$\mathbf{\Lambda}_s = \kappa \cdot \text{diag}\{d_0, \dots, d_{K-1}\} + \rho \mathbf{I}_K, \quad \mathbf{\Lambda}_n = \rho \mathbf{I}_{N_p - K}$$

e assumi-se $d_0 \geq d_1 \geq \dots \geq d_{K-1}$. O span da matriz de colunas unitárias \mathbf{U}_s consiste no subespaço do sinal de interesse, que, no caso, é $\mathbf{H}_p[n]$. Já o span \mathbf{U}_n é o subespaço do ruído. A equação (2.18), que reescrevemos como,

$$\mathbf{H}_p[n] = \mathbf{W}_{\tau,p} \tilde{\gamma}[n], \quad (4.1)$$

em que $\mathbf{W}_{\tau,p}$ é formado pelos vetores linha de \mathbf{W}_τ de posição $\{0, M_f, \dots, N_p - M_f\}$, nos revela então

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{R}}_f &= \mathbf{W}_{\tau,p} \mathbb{E}\{\tilde{\gamma}[n] \tilde{\gamma}^H[n]\} \mathbf{W}_{\tau,p}^H + \rho \mathbf{I} \\ &= \mathbf{W}_{\tau,p} \mathbf{\Sigma} \mathbf{W}_{\tau,p}^H + \rho \mathbf{I}, \end{aligned}$$

em que

$$\mathbf{\Sigma} = \kappa \cdot \text{diag}\{\rho(\tau_0), \dots, \rho(\tau_{K-1})\}.$$

E, portanto,

$$\mathbf{U}[\kappa \mathbf{D}] \mathbf{U}^H = \mathbf{W}_{\tau,p} \mathbf{\Sigma} \mathbf{W}_{\tau,p}^H.$$

Como a matriz à direita da igualdade acima tem posto K , conclui-se que a dimensão do subespaço do sinal é, de fato, igual ao número de multi-percursos do canal. Devido à equação (4.1), que foi derivada do modelo de canal TDL, o subespaço do sinal $\mathbf{H}_p[n]$ consiste no espaço coluna de $\mathbf{W}_{\tau,p}$. O subespaço do sinal consiste no subespaço de atrasos.

A matriz \mathbf{R} é estimada recursivamente como

$$\hat{\mathbf{R}}[n] = \alpha \hat{\mathbf{R}}[n-1] + (1 - \alpha) \tilde{\mathbf{H}}_p[n] \tilde{\mathbf{H}}_p^H[n].$$

Depois podemos calcular a auto-decomposição de $\hat{\mathbf{R}}[n]$ como

$$\hat{\mathbf{R}}[n] = \mathbf{U}[n] \mathbf{\Lambda}[n] \mathbf{U}^H[n]$$

e então selecionar \mathbf{U}_s a partir dos auto-vetores correspondentes aos K maiores auto-valores

desta decomposição.

Porém, o cálculo direto da auto-decomposição de $\hat{\mathbf{R}}[n]$ exige alta carga computacional, sendo inviável sua implementação prática. A alternativa é calcular $\mathbf{U}[n]$ recursivamente a partir de $\mathbf{U}[n-1]$, por meio de algum algoritmo ST. Exporemos abaixo dois algoritmos recorrentes na literatura: o LORAF [33] em suas versões 1, 2 e 3; e o PAST [34] e sua versão ortogonal OPAST [35]. A derivação desses algoritmos é bastante simples e direta. É o que será feito, de forma resumida, nas próximas duas sub-seções, por questão de auto-suficiência desta dissertação.

Nas próximas duas sub-seções, a notação usada não tem qualquer relação com aquela empregada até aqui. Foi decidido manter a notação dos artigos em que os algoritmos foram inicialmente propostos.

4.1.1 Algoritmo LORAF

O LORAF baseia-se no método *simultaneous orthogonal iteration*. Defini-se a matriz de recursão $\mathbf{Q}[t] \in \mathbb{C}^{N \times r}$ como

$$\mathbf{Q}[t]\mathbf{R}[t] = \mathbf{C} \cdot \mathbf{Q}[t-1], \quad \text{fatorização QR.} \quad (4.2)$$

O método afirma que a matriz $\mathbf{Q}[t]$ converge para a matriz dos auto-vetores principais de \mathbf{C} , e a seqüência de matrizes triangulares $\mathbf{R}[t]$ converge para a matriz diagonal dos auto-valores dominantes. A matriz $\mathbf{C} = \mathbb{E}\{\mathbf{x}[t]\mathbf{x}^H[t]\}$, que não é conhecida, é substituída por sua estimativa determinada recursivamente por

$$\mathbf{C}[t] = \alpha\mathbf{C}[t-1] + (1-\alpha)\mathbf{x}[t]\mathbf{x}^H[t]. \quad (4.3)$$

Com $\alpha \simeq 1$, a matriz $\mathbf{C}[t]$ varia lentamente com t , de forma a justificar o uso do método. Reescrevemos, então, a equação (4.2) como

$$\mathbf{A}[t] = \mathbf{C}[t]\mathbf{Q}[t-1] \quad (4.4a)$$

$$\mathbf{A}[t] = \mathbf{Q}[t]\mathbf{R}[t], \quad \text{fatorização QR.} \quad (4.4b)$$

Seja $\mathbf{P}_Q[t-1] = \mathbf{Q}[t-1]\mathbf{Q}^H[t-1]$ a matriz projeção sobre o espaço-coluna de $\mathbf{Q}[t-1]$. Decompomos $\mathbf{Q}[t]$ conforme

$$\mathbf{Q}[t] = \mathbf{P}_Q[t-1]\mathbf{Q}[t] + \mathbf{\Delta}[t], \quad (4.5)$$

em que $\Delta[t]$ é ortogonal ao espaço-coluna de $\mathbf{Q}[t-1]$, i.e.,

$$\mathbf{Q}^H[t-1]\Delta[t] = \mathbf{0}.$$

Introduzimos a matriz $\Theta[t] \in \mathbb{C}^{r \times r}$ dada por

$$\Theta[t] = \mathbf{Q}^H[t-1]\mathbf{Q}[t]. \quad (4.6)$$

Desta forma, a equação (4.5) pode ser reescrita como

$$\mathbf{Q}[t] = \mathbf{Q}[t-1]\Theta[t] + \Delta[t]. \quad (4.7)$$

Substituindo a equação (4.3) na equação (4.4a), obtemos

$$\begin{aligned} \mathbf{A}[t] &= (\alpha\mathbf{C}[t-1] + (1-\alpha)\mathbf{x}[t]\mathbf{x}^H[t]) \cdot \mathbf{Q}[t-1] \\ &= \alpha\mathbf{C}[t-1]\mathbf{Q}[t-1] + (1-\alpha)\mathbf{x}[t]\mathbf{h}^H[t], \end{aligned} \quad (4.8)$$

em que

$$\mathbf{h}[t] = \mathbf{Q}^H[t-1]\mathbf{x}[t]. \quad (4.9)$$

Substituindo a equação (4.7) na equação (4.8), e usando que $\mathbf{C}[t-1]\mathbf{Q}[t-2] = \mathbf{A}[t-1]$, obtemos

$$\mathbf{A}[t] = \alpha\mathbf{A}[t-1]\Theta[t-1] + \alpha\mathbf{C}[t-1]\Delta[t-1] + (1-\alpha)\mathbf{x}[t]\mathbf{h}^H[t].$$

O termo $\mathbf{C}[t-1]\Delta[t-1]$ tem complexidade computacional de $O(N^2r)$. Esse termo tem pouca influência no processo de recursão e pode ser descartado sem perda de desempenho. Assim, chegamos à seguinte recursão

$$\mathbf{A}[t] = \alpha\mathbf{A}[t-1]\Theta[t-1] + (1-\alpha)\mathbf{x}[t]\mathbf{h}^H[t], \quad (4.10)$$

que requer menor carga computacional de $O(Nr^2)$.

As equações (4.9), (4.10), (4.4b) e (4.6) constituem o algoritmo LORAF1, que é apresentado na tabela 4.1.

O algoritmo LORAF2 baseia-se numa simplificação computacional do LORAF1. Substituindo $\mathbf{A}[t]$ e $\mathbf{A}[t-1]$ por suas fatorizações QR na equação (4.10), obtemos

$$\mathbf{Q}[t]\mathbf{R}[t] = \alpha\mathbf{Q}[t-1]\mathbf{R}[t-1]\Theta[t-1] + (1-\alpha)\mathbf{x}[t]\mathbf{h}^H[t]. \quad (4.11)$$

Inicialização:		
$\mathbf{Q}[0] = \begin{pmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix};$	$\mathbf{\Theta}[0] = \mathbf{0};$	$0 \leq \alpha \leq 1;$
Para cada t :		
$\mathbf{h}[t] = \mathbf{Q}^H[t-1]\mathbf{x}[t]$		
$\mathbf{A}[t] = \alpha\mathbf{A}[t-1]\mathbf{\Theta}[t-1] + (1-\alpha)\mathbf{x}[t]\mathbf{h}^H[t]$		
$\mathbf{A}[t] = \mathbf{Q}[t]\mathbf{R}[t],$ fatorização QR		
$\mathbf{Q}[t] = \mathbf{Q}[t-1]\mathbf{\Theta}[t] + \mathbf{\Delta}[t]$		

Tabela 4.1: Algoritmo LORAF1.

Seja o complemento da projeção de $\mathbf{x}[t]$ sobre o espaço-coluna de $\mathbf{Q}[t-1]$ dado por

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_\perp[t] &= \mathbf{P}_Q^\perp[t-1]\mathbf{x}[t] = (\mathbf{I} - \mathbf{P}_Q[t-1])\mathbf{x}[t] \\ &= \mathbf{x}[t] - \mathbf{Q}[t-1]\mathbf{h}[t]. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Normalizamos $\mathbf{x}_\perp[t]$,

$$\bar{\mathbf{x}}_\perp[t] = Z^{-1/2}[t]\mathbf{x}_\perp[t], \quad (4.13)$$

em que

$$Z[t] = \mathbf{x}_\perp^H[t]\mathbf{x}_\perp[t], \quad (4.14)$$

de forma a termos

$$\mathbf{x}[t] = Z^{1/2}[t]\bar{\mathbf{x}}_\perp[t] + \mathbf{Q}[t-1]\mathbf{h}[t]. \quad (4.15)$$

Substituindo a equação (4.15) na equação (4.11), obtemos

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}[t]\mathbf{R}[t] &= \alpha\mathbf{Q}[t-1]\mathbf{R}[t-1]\mathbf{\Theta}[t-1] \\ &\quad + (1-\alpha)Z^{1/2}[t]\bar{\mathbf{x}}_\perp[t]\mathbf{h}^H[t] + (1-\alpha)\mathbf{Q}[t-1]\mathbf{h}[t]\mathbf{h}^H[t] \\ &= \mathbf{Q}[t-1](\alpha\mathbf{R}[t-1]\mathbf{\Theta}[t-1] + (1-\alpha)\mathbf{h}[t]\mathbf{h}^H[t]) \\ &\quad + (1-\alpha)Z^{1/2}[t]\bar{\mathbf{x}}_\perp[t]\mathbf{h}^H[t] \\ &= (\mathbf{Q}[t-1] \mid \bar{\mathbf{x}}_\perp[t]) \\ &\quad \cdot \begin{pmatrix} \alpha\mathbf{R}[t-1]\mathbf{\Theta}[t-1] + (1-\alpha)\mathbf{h}[t]\mathbf{h}^H[t] \\ (1-\alpha)Z^{1/2}[t]\mathbf{h}^H[t] \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Usando uma seqüência de rotações de Givens, cujo produto resulta na matriz unitária

Inicialização:		
$\mathbf{Q}[0] = \begin{pmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix};$	$\Theta[0] = \mathbf{I};$	$0 \leq \alpha \leq 1;$

Para cada t :		
$\mathbf{h}[t] = \mathbf{Q}^H[t-1]\mathbf{x}[t]$		
$\mathbf{x}_\perp = \mathbf{x}[t] - \mathbf{Q}[t-1]\mathbf{h}[t]$		
$Z[t] = \mathbf{x}_\perp^H[t]\mathbf{x}_\perp[t]$		
$\bar{\mathbf{x}}_\perp[t] = Z^{-1/2}[t]\mathbf{x}_\perp[t]$		
$\begin{pmatrix} \mathbf{R}[t] \\ 0 \dots 0 \end{pmatrix} = \mathbf{G}[t] \begin{pmatrix} \alpha\mathbf{R}[t-1]\Theta[t-1] + (1-\alpha)\mathbf{h}[t]\mathbf{h}^H[t] \\ (1-\alpha)Z^{1/2}[t]\mathbf{h}^H[t] \end{pmatrix}$		
$\mathbf{G}^H[t] = \begin{pmatrix} \Theta[t] & \star \\ \mathbf{f}^H[t] & \star \end{pmatrix}$		
$\mathbf{Q}[t] = \mathbf{Q}[t-1]\Theta[t] + \bar{\mathbf{x}}_\perp[t]\mathbf{f}^H[t]$		

Tabela 4.2: Algoritmo LORAF2.

$\mathbf{G}[t]$, a equação (4.16) pode ser dividida em

$$\begin{pmatrix} \mathbf{R}[t] \\ 0 \dots 0 \end{pmatrix} = \mathbf{G}[t] \begin{pmatrix} \alpha\mathbf{R}[t-1]\Theta[t-1] + (1-\alpha)\mathbf{h}[t]\mathbf{h}^H[t] \\ (1-\alpha)Z^{1/2}[t]\mathbf{h}^H[t] \end{pmatrix} \quad (4.17a)$$

$$(\mathbf{Q}[t] \mid \mathbf{q}[t]) = (\mathbf{Q}[t-1] \mid \bar{\mathbf{x}}_\perp[t])\mathbf{G}^H[t]. \quad (4.17b)$$

A rotação de Givens é descrita no apêndice B. Da equação (4.17b), temos

$$\begin{aligned} \mathbf{G}^H[t] &= \begin{pmatrix} \mathbf{Q}^H[t-1] \\ \bar{\mathbf{x}}_\perp^H[t] \end{pmatrix} (\mathbf{Q}[t] \mid \mathbf{q}[t]) \\ &= \begin{pmatrix} \Theta[t] & \mathbf{Q}^H[t-1]\mathbf{q}[t] \\ \mathbf{f}^H[t] & \bar{\mathbf{x}}_\perp^H[t]\mathbf{q}[t] \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (4.18)$$

em que

$$\mathbf{f}[t] = \mathbf{Q}^H[t]\bar{\mathbf{x}}_\perp[t].$$

Das equações (4.18) e (4.17b), vê-se que a atualização de $\mathbf{Q}[t]$ pode ser dada como

$$\mathbf{Q}[t] = \mathbf{Q}[t-1]\Theta[t] + \bar{\mathbf{x}}_\perp[t]\mathbf{f}^H[t]. \quad (4.19)$$

O LORAF2 é constituído pelas equações (4.9), (4.12), (4.13), (4.14), (4.17a), (4.18) e (4.19), que são resumidas na tabela 4.2.

A complexidade computacional do algoritmo LORAF2 advém principalmente do emprego da matriz $\Theta[t]$. Por exemplo, o produto $\mathbf{R}[t-1]\Theta[t-1]$ dado na equação (4.16)

requer uma carga computacional de $O(Nr^2)$. Quando o fator de esquecimento é próximo a 1, a matriz $\Theta[t]$ tende à matriz identidade. Isso nos sugere inserir $\Theta[t] = \mathbf{I}$, o que reduz consideravelmente a complexidade do LORAF2. Assim, a equação (4.17a) se simplifica como

$$\begin{pmatrix} \mathbf{R}[t] \\ 0 \dots 0 \end{pmatrix} = \mathbf{G}[t] \begin{pmatrix} \alpha \mathbf{R}[t-1] + (1-\alpha) \mathbf{h}[t] \mathbf{h}^H[t] \\ (1-\alpha) Z^{1/2}[t] \mathbf{h}^H[t] \end{pmatrix} \quad (4.20)$$

O segundo termo à direita da igualdade na equação (4.20) pode ser escrito como

$$\alpha \begin{pmatrix} \mathbf{R}[t-1] \\ 0 \dots 0 \end{pmatrix} + (1-\alpha) \begin{pmatrix} \mathbf{h}[t] \\ Z^{1/2}[t] \end{pmatrix} \mathbf{h}^H[t] \quad (4.21)$$

Devido à estrutura acima, no cálculo de $\mathbf{G}[t]$, o número de rotações de Givens pode ser reduzido para $2r - 1$. Primeiramente, $r - 1$ rotações de Givens são usadas para cancelar os $r - 1$ últimos elementos da primeira coluna da matriz dada na equação (4.21), o que resulta numa matriz que possui o seguinte formato, (para uma ilustração com $r = 5$):

$$\begin{pmatrix} \alpha \mathbf{R}[t-1] + (1-\alpha) \mathbf{h}[t] \mathbf{h}^H[t] \\ (1-\alpha) \|\mathbf{x}_\perp\| \mathbf{h}^H[t] \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathbf{G}_1[t]} \begin{pmatrix} \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times \\ & \times & \times & \times & \times \\ & & \times & \times & \times \\ & & & \times & \times \\ & & & & \times \end{pmatrix}.$$

Depois, a matriz obtida é reduzida, com a aplicação de r rotações de Givens, a uma matriz triangular superior conforme abaixo:

$$\begin{pmatrix} \underline{\times} & \times & \times & \times & \times \\ \underline{\times} & \underline{\times} & \times & \times & \times \\ & \underline{\times} & \underline{\times} & \times & \times \\ & & \underline{\times} & \underline{\times} & \times \\ & & & \underline{\times} & \underline{\times} \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathbf{G}_2[t]} \begin{pmatrix} \times & \times & \times & \times & \times \\ & \times & \times & \times & \times \\ & & \times & \times & \times \\ & & & \times & \times \\ & & & & \times \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{R}[t] \\ 0 \dots 0 \end{pmatrix}.$$

Deste modo, $\mathbf{G}[t] = \mathbf{G}_2[t] \mathbf{G}_1[t]$. As rotações de Givens não são acumuladas em $\mathbf{G}_1[t]$ e $\mathbf{G}_2[t]$, e depois em $\mathbf{G}[t]$. Elas são aplicadas diretamente em $(\mathbf{Q}[t-1] \mid \bar{\mathbf{x}}_\perp[t])$, o que resulta na operação

$$(\mathbf{Q}[t] \mid \mathbf{q}[t]) = (\mathbf{Q}[t-1] \mid \bar{\mathbf{x}}_\perp[t]) \mathbf{G}^H[t],$$

que requer $2Nr - N$ multiplicações.

Pondo a equação (4.20) no lugar de (4.17a), e usando os passos acima na obtenção de $\mathbf{R}[t]$, e $\mathbf{Q}[t]$, o algoritmo LORAF2 resulta no LORAF3, que é dado na tabela 4.3.

Inicialização:	
$\mathbf{Q}[0] = \begin{pmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix};$	$0 \leq \alpha \leq 1;$
Para cada t :	
$\mathbf{h}[t] = \mathbf{Q}^H[t-1]\mathbf{x}[t]$	
$\mathbf{x}_\perp = \mathbf{x}[t] - \mathbf{Q}[t-1]\mathbf{h}[t]$	
$Z[t] = \mathbf{x}_\perp^H[t]\mathbf{x}_\perp[t]$	
$\bar{\mathbf{x}}_\perp[t] = Z^{-1/2}[t]\mathbf{x}_\perp[t]$	
$\begin{pmatrix} \mathbf{R}[t] \\ \mathbf{0} \cdots \mathbf{0} \end{pmatrix} = \mathbf{G}[t] \begin{pmatrix} \alpha\mathbf{R}[t-1] + (1-\alpha)\mathbf{h}[t]\mathbf{h}^H[t] \\ (1-\alpha)Z^{1/2}[t]\mathbf{h}^H[t] \end{pmatrix}$	
$(\mathbf{Q}[t] \mathbf{q}[t]) = (\mathbf{Q}[t-1] \bar{\mathbf{x}}_\perp[t])\mathbf{G}^H[t]$	

Tabela 4.3: Algoritmo LORAF3.

4.1.2 Algoritmo PAST

Seja $\{\mathbf{x}[t]\}$ a seqüência de vetores $n \times 1$ cuja matriz de covariância é $\mathbf{C} = \mathbb{E}\{\mathbf{x}[t]\mathbf{x}^H[t]\}$. Seja $p < n$ a dimensão do subespaço correspondente ao span dos autovetores principais. Considere a seguinte função-custo:

$$\begin{aligned} J(\mathbf{W}) &= \mathbb{E}\{\|\mathbf{x} - \mathbf{W}\mathbf{W}^H\mathbf{x}\|^2\} \\ &= \text{tr}(\mathbf{C}) - 2\text{tr}(\mathbf{W}^H\mathbf{C}\mathbf{W}) + \text{tr}(\mathbf{W}\mathbf{C}\mathbf{W}\mathbf{W}^H\mathbf{W}). \end{aligned}$$

De [34], sabe-se que

1. \mathbf{W} é um ponto estacionário de $J(\mathbf{W})$ se, e somente se, $\mathbf{W} = \mathbf{U}_s\mathbf{Q}$, em que a matriz \mathbf{U}_s de dimensão $n \times p$ contém p auto-vetores distintos de \mathbf{C} , e \mathbf{Q} é uma matriz unitária $p \times p$ qualquer;
2. Todos os pontos estacionários de $J(\mathbf{W})$ são pontos de sela, exceto quando \mathbf{U}_s contém os p auto-vetores dominantes de \mathbf{C} . Neste caso, $J(\mathbf{W})$ atinge seu mínimo global.

A versão LS dessa função-custo é

$$\begin{aligned} J(\mathbf{W}[t]) &= \sum_{i=1}^t \alpha^{t-i} \|\mathbf{x}[i] - \mathbf{W}[t]\mathbf{W}^H[t]\mathbf{x}[i]\|^2 \\ &= \text{tr}(\mathbf{C}[t]) - 2\text{tr}(\mathbf{W}^H[t]\mathbf{C}[t]\mathbf{W}[t]) \\ &\quad + \text{tr}(\mathbf{W}^H[t]\mathbf{C}[t]\mathbf{W}[t]\mathbf{W}^H[t]\mathbf{W}[t]), \end{aligned}$$

em que

$$\begin{aligned}\mathbf{C}[t] &= \sum_{i=1}^t \alpha^{t-i} \mathbf{x}[i] \mathbf{x}^H[i] \\ &= \alpha \mathbf{C}[t-1] + \mathbf{x}[t] \mathbf{x}^H[t].\end{aligned}$$

Com $\mathbf{C}[t]$ no lugar de \mathbf{C} , as propriedades dadas nos itens acima continuam válidas.

$J(\mathbf{W}[t])$ é uma função de quarta ordem dos elementos de $\mathbf{W}[t]$. No PAST, a projeção $\mathbf{W}^H[t] \mathbf{x}[i]$, que é desconhecida, é aproximada por $\mathbf{y}[i] = \mathbf{W}^H[i-1] \mathbf{x}[i]$, que pode ser calculado para $1 \leq i \leq t$ no instante t . Assim, obtém-se a seguinte função-custo modificada:

$$\begin{aligned}J'(\mathbf{W}[t]) &= \sum_{i=1}^t \alpha^{t-i} \|\mathbf{x}[i] - \mathbf{W}[t] \mathbf{y}[i]\|^2 \\ &= \text{tr}(\mathbf{C}[t]) - 2 \text{tr}(\mathbf{W}^H[t] \mathbf{C}_{xy}) + \text{tr}(\mathbf{W}[t] \mathbf{C}_{yy}[t] \mathbf{W}^H[t]),\end{aligned}$$

em que

$$\begin{aligned}\mathbf{C}_{xy}[t] &= \sum_{i=1}^t \alpha^{t-i} \mathbf{x}[i] \mathbf{y}^H[i] & \mathbf{C}_{yy}[t] &= \sum_{i=1}^t \alpha^{t-i} \mathbf{y}[i] \mathbf{y}^H[i] \\ &= \alpha \mathbf{C}_{xy}[t-1] + \mathbf{x}[t] \mathbf{y}^H[t] & &= \alpha \mathbf{C}_{yy}[t-1] + \mathbf{y}[t] \mathbf{y}^H[t].\end{aligned}\quad (4.22)$$

Agora observa-se que $J'(\mathbf{W}[t])$ é uma função de ordem dois. Derivando $J'(\mathbf{W}[t])$ em relação a $\mathbf{W}[t]$, temos

$$\frac{\partial J'(\mathbf{W}[t])}{\partial \mathbf{W}[t]} = -2 \mathbf{C}_{xy}[t] + 2 \mathbf{W}[t] \mathbf{C}_{yy}[t].$$

Como, neste caso, $J'(\mathbf{W}[t])$ é mínimo quando $\partial J'(\mathbf{W}[t]) / \partial \mathbf{W}[t] = 0$, temos

$$\mathbf{W}[t] = \mathbf{C}_{xy}[t] \mathbf{C}_{yy}^{-1}[t]. \quad (4.23)$$

Consideremos a *identidade de Woodbury* que afirma que

$$(\mathbf{A} + \mathbf{u} \mathbf{v}^H)^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - \frac{\mathbf{A}^{-1} \mathbf{u} \mathbf{v}^H \mathbf{A}^{-1}}{1 + \mathbf{v}^H \mathbf{A}^{-1} \mathbf{u}},$$

em que \mathbf{A} , \mathbf{u} e \mathbf{v} têm dimensão $n \times n$, $n \times 1$ e $n \times 1$, respectivamente, e a inversa \mathbf{A}^{-1} existe. Aplicando tal identidade à equação (4.22), com $\mathbf{P}[t] = \mathbf{C}_{yy}^{-1}[t]$, obtém-se

$$\mathbf{P}[t] = \alpha^{-1} \mathbf{P}[t-1] - \gamma[t] \mathbf{z}[t] \mathbf{z}^H[t], \quad (4.24)$$

PAST:	$\mathbf{W}[t] = \mathbf{W}[t-1] + \bar{\mathbf{e}}[t]\mathbf{z}^H[t]$ $\mathbf{z}[t] = \alpha^{-1}\mathbf{P}[t-1]\mathbf{y}[t]$ $\mathbf{y}[i] = \mathbf{W}^H[i-1]\mathbf{x}[i]$ $\gamma[t] = (1 - \mathbf{y}^H[t]\mathbf{z}[t])^{-1}$ $\bar{\mathbf{e}}[t] = \gamma[t](\mathbf{x}[t] - \mathbf{W}[t-1]\mathbf{y}[t])$ $\mathbf{P}[t] = \alpha^{-1}\mathbf{P}[t-1] - \gamma[t]\mathbf{z}[t]\mathbf{z}^H[t]$
OPAST:	$\mathbf{W}[t] = \mathbf{W}[t-1] + \tilde{\mathbf{e}}[t]\mathbf{z}^H[t]$ $\beta[t] = \frac{1}{\ \mathbf{z}[t]\ ^2} \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \ \bar{\mathbf{e}}[t]\ ^2 \cdot \ \mathbf{z}[t]\ ^2}} - 1 \right)$ $\tilde{\mathbf{e}}[t] = \beta[t]\mathbf{W}[t-1]\mathbf{z}[t] + (1 + \beta[t] \cdot \ \bar{\mathbf{z}}[t]\ ^2)\bar{\mathbf{e}}[t]$

Tabela 4.4: Algoritmos PAST e OPAST.

em que

$$\gamma[t] = (1 - \mathbf{y}^H[t]\mathbf{z}[t])^{-1}, \quad \mathbf{z}[t] = \alpha^{-1}\mathbf{P}[t-1]\mathbf{y}[t]. \quad (4.25)$$

Agora, desenvolvendo a equação (4.23), escrevemos

$$\begin{aligned} \mathbf{W}[t] &= \mathbf{C}_{xy}[t] \cdot (\alpha^{-1}\mathbf{P}[t-1] - \gamma[t]\mathbf{z}[t]\mathbf{z}^H[t]) \\ &= (\alpha\mathbf{C}_{xy}[t-1] + \mathbf{x}[t]\mathbf{y}^H[t]) \cdot (\alpha^{-1}\mathbf{P}[t-1]) \cdot (\mathbf{I} - \gamma[t]\mathbf{y}[t]\mathbf{z}^H[t]) \\ &= (\mathbf{W}[t-1] + \mathbf{x}[t]\mathbf{z}^H[t]) \cdot (\mathbf{I} - \gamma[t]\mathbf{y}[t]\mathbf{z}^H[t]) \\ &= \mathbf{W}[t-1] - \gamma[t](\mathbf{W}[t-1]\mathbf{y}[t])\mathbf{z}^H[t] + \mathbf{x}[t]\mathbf{z}^H[t](\mathbf{I} - \gamma[t]\mathbf{y}[t]\mathbf{z}^H[t]). \end{aligned}$$

Observando que

$$\begin{aligned} \mathbf{x}[t]\mathbf{z}^H[t](\mathbf{I} - \gamma[t]\mathbf{y}[t]\mathbf{z}^H[t]) &= \mathbf{x}[t](1 - \gamma[t]\mathbf{z}^H[t]\mathbf{y}[t])\mathbf{z}^H[t] \\ &= \gamma[t]\mathbf{x}[t]\mathbf{z}^H[t], \end{aligned}$$

temos, finalmente,

$$\begin{aligned} \mathbf{W}[t] &= \mathbf{W}[t-1] + \gamma[t](\mathbf{x}[t] - \mathbf{W}[t-1]\mathbf{y}[t])\mathbf{z}^H[t] \\ &= \mathbf{W}[t-1] + \bar{\mathbf{e}}[t]\mathbf{z}^H[t], \end{aligned} \quad (4.26)$$

em que

$$\bar{\mathbf{e}}[t] = \gamma[t](\mathbf{x}[t] - \mathbf{W}[t-1]\mathbf{y}[t]). \quad (4.27)$$

Junto com $\mathbf{y}[i] = \mathbf{W}^H[i-1]\mathbf{x}[i]$, as equações (4.24), (4.25), (4.26) e (4.27) formam o algoritmo PAST, que é dado na Tabela 4.4.

Devido à aproximação de $\mathbf{W}^H[t]\mathbf{x}[i]$ por $\mathbf{W}^H[i-1]\mathbf{x}[i]$, a solução $\mathbf{W}[t]$ deixa de ter colunas unitárias. O OPAST consiste no PAST adicionado do seguinte processo de ortogonalização (com certo abuso de notação):

$$\mathbf{W}[t] := \mathbf{W}[t](\mathbf{W}^H[t]\mathbf{W}[t])^{-1/2}. \quad (4.28)$$

Com a suposição agora que $\mathbf{W}[t-1]$ é ortonormal, temos

$$\begin{aligned} \mathbf{W}^H[t]\mathbf{W}[t] &= \mathbf{I} + \|\bar{\mathbf{e}}[t]\|^2 \mathbf{z}[t]\mathbf{z}^H[t] \\ &= \mathbf{I} + \mathbf{v}[t]\mathbf{v}^H[t] \end{aligned}$$

em que foi usado $\mathbf{W}^H[t-1]\bar{\mathbf{e}}[t] = \mathbf{0}$, e denotado $\mathbf{v}[t] = \|\bar{\mathbf{e}}[t]\|\mathbf{z}[t]$. Logo,

$$\begin{aligned} (\mathbf{W}^H[t]\mathbf{W}[t])^{-1/2} &= \mathbf{I} + \frac{1}{\|\mathbf{v}[t]\|^2} \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \|\mathbf{v}[t]\|^2}} - 1 \right) \mathbf{v}[t]\mathbf{v}^H[t] \\ &= \mathbf{I} + \beta[t]\mathbf{z}[t]\mathbf{z}^H[t], \end{aligned} \quad (4.29)$$

onde

$$\beta[t] = \frac{1}{\|\mathbf{z}[t]\|^2} \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \|\bar{\mathbf{e}}[t]\|^2\|\mathbf{z}[t]\|^2}} - 1 \right). \quad (4.30)$$

Substituindo a equação (4.29) na equação (4.28), e usando a forma recursiva de $\mathbf{W}[t]$ dada na equação (4.26), chegamos a

$$\begin{aligned} \mathbf{W}[t] &= (\mathbf{W}[t-1] + \bar{\mathbf{e}}[t]\mathbf{z}^H[t]) \cdot (\mathbf{I} + \beta[t]\mathbf{z}[t]\mathbf{z}^H[t]) \\ &= \mathbf{W}[t-1] + \tilde{\mathbf{e}}[t]\mathbf{z}^H[t], \end{aligned} \quad (4.31)$$

em que

$$\tilde{\mathbf{e}}[t] = \beta[t]\mathbf{W}[t-1]\mathbf{z}[t] + (1 + \beta[t] \cdot \|\mathbf{z}[t]\|^2)\bar{\mathbf{e}}[t]. \quad (4.32)$$

As equações (4.30), (4.31) e (4.32), mais o PAST, constituem o OPAST, que é dado na tabela 4.4

4.2 Estimação dos Filtros Temporais

O coeficientes dos filtros que exploram as correlações do canal no tempo, dados na equação (3.19), podem ser reescritos, para $n' = 0$, como

$$\mathbf{c}[l] = (d_l\kappa\mathbf{R}_t + \rho\mathbf{I})^{-1}d_l\kappa\mathbf{r}_t, \quad (4.33)$$

onde os índices de $\mathbf{c}[l; 0]$ e $\mathbf{r}_t[0]$ foram omitidos.

Encontremos as correlações acima. Seja

$$\mathbb{E}\{\tilde{\mathbf{H}}_p[n + n_1]\tilde{\mathbf{H}}_p^H[n_1]\} = \kappa\bar{r}_t[n]\mathbf{R}_f + \rho\delta[n]\mathbf{I}.$$

Multiplicando ambos os lados por \mathbf{U}_s^H e \mathbf{U}_s , obtemos

$$\mathbb{E}\{\tilde{\mathbf{d}}[n + n_1]\tilde{\mathbf{d}}^H[n_1]\} = \kappa\bar{r}_t[n]\mathbf{D} + \rho\delta[n]\mathbf{I},$$

ou

$$\mathbb{E}\{\tilde{d}[n + n_1, l]\tilde{d}^*[n_1, l]\} = d_l\kappa\bar{r}_t[n] + \rho\delta[n]\mathbf{I},$$

em que $\tilde{\mathbf{d}}[n] = (\tilde{d}[n, 0], \dots, \tilde{d}[n, K - 1])^T = \mathbf{U}_s^H\tilde{\mathbf{H}}_p[n]$. Denotado $\tilde{\mathbf{d}}[n; l] = (\tilde{d}[n + M, l], \dots, \tilde{d}[n - M, l])^T$, podemos escrever

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{R}}_t[l] &= \mathbb{E}\{\tilde{\mathbf{d}}[n; l]\tilde{\mathbf{d}}^H[n; l]\} & \tilde{\mathbf{r}}_t[l] &= \mathbb{E}\{\tilde{\mathbf{d}}[n; l]\tilde{d}^*[n, l]\} \\ &= d_l\kappa\mathbf{R}_t + \rho\mathbf{I}, & &= d_l\kappa\mathbf{r}_t + \rho\mathbf{e}_M,\end{aligned}$$

em que $\mathbf{e}_M = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)^T$, com o elemento 1 ocupando a $(M + 1)$ -ésima posição. Assim, a equação (4.33) é reescrita como

$$\begin{aligned}\mathbf{c}[l] &= \tilde{\mathbf{R}}_t^{-1}[l](\tilde{\mathbf{r}}_t[l] - \rho\mathbf{e}_M) \\ &= \mathbf{e}_M - \rho\tilde{\mathbf{R}}_t^{-1}[l]\mathbf{e}_M,\end{aligned}\tag{4.34}$$

onde foi usado que $\tilde{\mathbf{R}}_t^{-1}[l]\tilde{\mathbf{r}}_t[l] = \mathbf{e}_M$.

Determinamos a seguinte estimação recursiva de $\tilde{\mathbf{R}}_t[l]$:

$$\tilde{\mathbf{R}}_t[n; l] = \alpha\tilde{\mathbf{R}}_t[n - 1; l] + (1 - \alpha)\tilde{\mathbf{d}}[n; l]\tilde{\mathbf{d}}^H[n; l].\tag{4.35}$$

E, deste modo, a estimativa de $\mathbf{c}[l]$ no instante n é dada como

$$\mathbf{c}[n; l] = \mathbf{e}_M - \rho\tilde{\mathbf{R}}_t^{-1}[n; l]\mathbf{e}_M.$$

Vamos agora encontrar uma forma recursiva para $\mathbf{c}[n; l]$. Pela identidade de Woodbury, podemos escrever, onde adotamos $\mathbf{P}[n; l] = \tilde{\mathbf{R}}_t^{-1}[n; l]$,

$$\mathbf{P}[n; l] = \alpha^{-1}\mathbf{P}[n - 1; l] - \alpha^{-1}\mathbf{k}[n; l]\tilde{\mathbf{d}}^H[n; l]\mathbf{P}[n - 1; l],\tag{4.36}$$

em que

$$\mathbf{k}[n; l] = \frac{\alpha^{-1}\mathbf{P}[n - 1; l]\tilde{\mathbf{d}}[n; l]}{(1 - \alpha)^{-1} + \alpha^{-1}\tilde{\mathbf{d}}^H[n; l]\mathbf{P}[n - 1; l]\tilde{\mathbf{d}}[n; l]}.\tag{4.37}$$

<u>Inicialização:</u>	
$\mathbf{P}[0; l] = \mathbf{I};$	$0 < \alpha < 1;$

<u>Para cada n:</u>	
$\boldsymbol{\pi}[n; l] = \mathbf{P}[n - 1; l] \tilde{\mathbf{d}}[n; l]$	
$\mathbf{k}[n; l] = \frac{\boldsymbol{\pi}[n; l]}{\alpha \cdot (1 - \alpha)^{-1} + \tilde{\mathbf{d}}^H[n; l] \boldsymbol{\pi}[n; l]}$	
$\mathbf{P}[n; l] = \alpha^{-1} \mathbf{P}[n - 1; l] - \alpha^{-1} \mathbf{k}[n; l] \boldsymbol{\pi}^H[n; l]$	
$\mathbf{p}[n; l] = \mathbf{P}[n; l] \mathbf{e}_M$	
$\hat{d}[n; l] = \tilde{d}[n; l] - \rho(\mathbf{p}^H[n; l] \tilde{\mathbf{d}}[n; l])$	

Tabela 4.5: Atualização dos coeficientes dos filtros temporais.

Definindo o vetor

$$\mathbf{p}[n; l] = \mathbf{P}[n; l] \mathbf{e}_M, \quad (4.38)$$

segue que os coeficientes $\mathbf{c}[n; l]$ são atualizados como

$$\mathbf{c}[n; l] = \mathbf{e}_M - \rho \mathbf{p}[n; l]. \quad (4.39)$$

O algoritmo resultante, constituído pelas equações (4.36), (4.37), (4.38) e (4.39), é resumido na tabela (4.5).

Multiplicando a equação (4.36) por \mathbf{e}_M , obtemos

$$\mathbf{p}[n; l] = \alpha^{-1} \mathbf{p}[n - 1; l] - \alpha^{-1} \mathbf{k}[n; l] (\tilde{\mathbf{d}}^H[n; l] \mathbf{p}[n - 1; l]), \quad (4.40)$$

que é uma forma recursiva para $\mathbf{p}[n; l]$. Portanto, vê-se que basta conhecer $\mathbf{k}[n; l]$ no instante n para que possamos atualizar $\mathbf{p}[n; l]$, não sendo necessário um cálculo explícito de $\mathbf{P}[n; l]$. Existem algoritmos rápidos que possibilitam a atualização de $\mathbf{k}[n; l]$ a uma complexidade de $O(2M + 1)$ [32]. Isso viabiliza a aplicação prática do algoritmo. Os K filtros temporais exigiriam, ao total, uma carga computacional de $O((2M + 1)K)$.

Devido a problemas de instabilidade numérica e a variações no espalhamento dos autovalores da matriz de correlação de $\tilde{\mathbf{d}}[n; l]$, a fórmula recursiva dada na equação (4.36), e conseqüentemente o cálculo rápido de $\mathbf{k}[n; l]$, pode apresentar uma divergência explosiva (de fato, esse comportamento foi observado nas simulações). Para contornar tal problema, adotamos uma abordagem por decomposição QR [32].

Seja $\tilde{\mathbf{R}}_t^{1/2}[n; l]$ a raiz quadrada de $\tilde{\mathbf{R}}_t[n; l]$, de forma que

$$\tilde{\mathbf{R}}_t[n; l] = \tilde{\mathbf{R}}_t^{1/2}[n; l]\tilde{\mathbf{R}}_t^{H/2}[n; l], \quad (4.41)$$

em que $\tilde{\mathbf{R}}_t^{H/2}[n; l]$ é uma matriz triangular superior. Organizamos os termos envolvidos na equação (4.35) na seguinte matriz:

$$\mathbf{G}[n] = \begin{pmatrix} \alpha\tilde{\mathbf{R}}_t[n; l] & (1 - \alpha)^{1/2}\tilde{\mathbf{d}}[n; l] \\ (1 - \alpha)^{1/2}\tilde{\mathbf{d}}^H[n; l] & 1 \end{pmatrix}.$$

Usando a decomposição dada na equação (4.41), podemos escrever

$$\mathbf{G}[n] = \begin{pmatrix} \alpha^{1/2}\tilde{\mathbf{R}}_t^{1/2}[n-1; l] & (1 - \alpha)^{1/2}\tilde{\mathbf{d}}[n; l] \\ \mathbf{0}^H & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha^{1/2}\tilde{\mathbf{R}}_t^{H/2}[n-1; l] & \mathbf{0} \\ (1 - \alpha)^{1/2}\tilde{\mathbf{d}}^H[n; l] & 1 \end{pmatrix}.$$

Aplicando uma seqüência de rotações de Givens, podemos obter a matriz unitária $\Theta[n; l]$ satisfazendo

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \alpha^{1/2}\tilde{\mathbf{R}}_t^{1/2}[n-1; l] & (1 - \alpha)^{1/2}\tilde{\mathbf{d}}[n; l] \\ \mathbf{0}^H & 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} \Theta[n; l] = \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{B}_{11}[n; l] & \mathbf{0} \\ \mathbf{b}_{21}^H[n; l] & b_{22}[n; l] \end{pmatrix}}_{\mathbf{B}}, \quad (4.42)$$

em que $\mathbf{B}_{11}[n; l]$ é triangular inferior. Como $\Theta[n; l]$ é unitária, i.e., $\Theta[n; l]\Theta^H[n; l] = \mathbf{I}$, temos

$$\begin{aligned} & \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha^{1/2}\tilde{\mathbf{R}}_t^{1/2}[n-1; l] & (1 - \alpha)^{1/2}\tilde{\mathbf{d}}[n; l] \\ \mathbf{0}^H & 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha^{1/2}\tilde{\mathbf{R}}_t^{H/2}[n-1; l] & \mathbf{0} \\ (1 - \alpha)^{1/2}\tilde{\mathbf{d}}^H[n; l] & 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}^H} \\ & = \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{B}_{11}[n; l] & \mathbf{0} \\ \mathbf{b}_{21}^H[n; l] & b_{22}[n; l] \end{pmatrix}}_{\mathbf{B}} \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{B}_{11}^H[n; l] & \mathbf{b}_{21}[n; l] \\ \mathbf{0}^H & b_{22}^*[n; l] \end{pmatrix}}_{\mathbf{B}^H}. \end{aligned} \quad (4.43)$$

Expandindo o produto das matrizes e comparando os respectivos termos em ambos os lados da equação (4.43), obtemos as identidades

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{R}}_t[n; l] &= \mathbf{B}_{11}[n; l]\mathbf{B}_{11}^H[n; l] \\ (1 - \alpha)^{1/2}\tilde{\mathbf{d}}[n; l] &= \mathbf{B}_{11}[n; l]\mathbf{b}_{21}[n; l] \\ 1 &= \mathbf{b}_{21}^H[n; l]\mathbf{b}_{21}[n; l] + b_{22}[n; l]b_{22}^*[n; l], \end{aligned}$$

que resultam em

$$\begin{aligned}\mathbf{B}_{11}[n; l] &= \tilde{\mathbf{R}}_t^{1/2}[n; l] \\ \mathbf{b}_{21}[n; l] &= (1 - \alpha)^{1/2} \tilde{\mathbf{R}}_t^{-1/2}[n; l] \tilde{\mathbf{d}}[n; l]\end{aligned}\quad (4.44)$$

$$|b_{22}[n; l]|^2 = 1 - (1 - \alpha) \mathbf{d}_M^H[n; l] \tilde{\mathbf{R}}_t^{-1}[n; l] \tilde{\mathbf{d}}[n; l] \quad (4.45)$$

Com a substituição da equação (4.36) na equação (4.45), após alguns cálculos, temos

$$|b_{22}[n; l]|^2 = (1 - \alpha)^{-1} \gamma[n; l]$$

em que

$$\gamma[n; l] = \frac{1}{(1 - \alpha)^{-1} + \alpha^{-1} \tilde{\mathbf{d}}^H[n; l] \mathbf{P}[n - 1; l] \tilde{\mathbf{d}}[n; l]}.$$

E, assim,

$$b_{22}[n; l] = (1 - \alpha)^{1/2} \gamma^{1/2}[n; l].$$

Logo, podemos reescrever a equação (4.42) como

$$\begin{aligned}& \begin{pmatrix} \alpha^{1/2} \tilde{\mathbf{R}}_t^{1/2}[n - 1; l] & (1 - \alpha)^{1/2} \tilde{\mathbf{d}}[n; l] \\ \mathbf{0}^H & 1 \end{pmatrix} \Theta[n; l] \\ &= \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{R}}_t^{1/2}[n; l] & \mathbf{0} \\ (1 - \alpha)^{1/2} \tilde{\mathbf{d}}^H[n; l] \tilde{\mathbf{R}}_t^{-H/2}[n; l] & (1 - \alpha)^{1/2} \gamma^{1/2}[n; l] \end{pmatrix}. \quad (4.46)\end{aligned}$$

Desenvolvendo a equação (4.37), obtemos

$$(1 - \alpha)^{-1} \mathbf{k}[n; l] = \alpha^{-1} \mathbf{P}[n - 1; l] \tilde{\mathbf{d}}[n; l] - \alpha^{-1} \mathbf{k}[n; l] \tilde{\mathbf{d}}^H[n; l] \mathbf{P}[n - 1; l] \tilde{\mathbf{d}}[n; l],$$

e, daí,

$$\begin{aligned}\mathbf{k}[n; l] &= (1 - \alpha) \mathbf{P}[n; l] \tilde{\mathbf{d}}[n; l] \\ &= (1 - \alpha) \tilde{\mathbf{R}}_t^{-1}[n; l] \tilde{\mathbf{d}}[n; l].\end{aligned}$$

Da equação (4.44), vê-se que

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{R}}_t^{H/2}[n; l] \mathbf{k}[n; l] &= (1 - \alpha)^{1/2} \{ (1 - \alpha)^{1/2} \tilde{\mathbf{R}}_t^{-1/2}[n; l] \tilde{\mathbf{d}}[n; l] \} \\ &= (1 - \alpha)^{1/2} \mathbf{b}_{21}[n; l].\end{aligned}\quad (4.47)$$

Como $\tilde{\mathbf{R}}_t^{H/2}[n; l]$ é triangular superior, o sistema da equação (4.47) pode ser resolvido pelo método de *back-substitution*. Tal método é apresentado no apêndice B. Assim, obtemos $\mathbf{k}[n; l]$. O vetor $\mathbf{p}[n; l]$ dado na equação (4.40) é então atualizado.

<u>Inicialização:</u>		
$\mathbf{P}[0; l] = \mathbf{I};$	$\mathbf{p}[0; l] = \mathbf{e}_M;$	$0 < \alpha < 1;$

<u>Para cada n:</u>		
$\begin{pmatrix} \alpha^{1/2} \tilde{\mathbf{R}}_t^{1/2}[n-1; l] & (1-\alpha)^{1/2} \tilde{\mathbf{d}}[n; l] \\ \mathbf{0}^H & 1 \end{pmatrix} \Theta[n; l] = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_{11}[n; l] & \mathbf{0} \\ \mathbf{b}_{21}^H[n; l] & b_{22}[n; l] \end{pmatrix}$		
$\tilde{\mathbf{R}}_t^{1/2}[n; l] = \mathbf{B}_{11}[n; l]$		
$\mathbf{k}[n; l] = (1 - \alpha)^{1/2} \{ \tilde{\mathbf{R}}_t^{-H/2}[n; l] \mathbf{b}_{21}[n; l] \}$ (via back-substitution)		
$\mathbf{p}[n; l] = \alpha^{-1} \mathbf{p}[n-1; l] - \alpha^{-1} \mathbf{k}[n; l] (\tilde{\mathbf{d}}^H[n; l] \mathbf{p}[n-1; l])$		
$\hat{d}[n; l] = \tilde{d}[n; l] - \rho (\mathbf{p}^H[n; l] \tilde{\mathbf{d}}[n; l])$		

Tabela 4.6: Algoritmo baseado em decomposição QR.

O algoritmo resultante, baseado em decomposição QR, é constituído pelas equações (4.46), (4.47), (4.40) e (4.39); e é dado resumidamente na tabela 4.6.

O algoritmo baseado em decomposição QR também suporta uma versão rápida, de complexidade computacional de $O(2M + 1)$ [32].

4.3 Estimação dos Parâmetros ρ e K

Será suposto que o sistema opera com um número máximo de multi-percursos $K_{\max} < N_p$, cuja escolha depende do ambiente em que o receptor opera, e da máxima carga computacional suportada. Assim, definimos

$$\tilde{\mathbf{d}}[n] = \mathbf{U}_s^H \tilde{\mathbf{H}}_p[n],$$

onde agora $\tilde{\mathbf{d}}[n]$ tem dimensão $K_{\max} \times 1$ e \mathbf{U}_s contém os K_{\max} auto-vetores dominantes de \mathbf{U} . Deste modo, podemos escrever as relações

$$\begin{aligned} P_{\tilde{H}} &= \mathbb{E}\{\tilde{\mathbf{H}}_p^H[n] \tilde{\mathbf{H}}_p[n]\} & P_{\tilde{d}} &= \mathbb{E}\{\tilde{\mathbf{d}}^H[n] \tilde{\mathbf{d}}[n]\} \\ &= N_p \kappa \sigma_h^2 + N_p \rho, & &= N_p \kappa \sigma_h^2 + K_{\max} \rho. \end{aligned}$$

Daí, encontramos ρ como

$$\rho = \frac{P_{\tilde{H}} - P_{\tilde{d}}}{N_p - K_{\max}}.$$

<u>Inicialização:</u>				
$K_{\max};$	$\hat{\rho}[n] = 0;$	$p[n; l] = 0;$	$0 < \alpha < 1;$	$\beta > 1;$

<u>Para cada n:</u>				
$\hat{\rho}[n] = \alpha \cdot \hat{\rho}[n - 1] + (1 - \alpha) \cdot (\tilde{\mathbf{H}}_p^H[n] \tilde{\mathbf{H}}_p[n] - \tilde{\mathbf{d}}^H[n] \tilde{\mathbf{d}}[n]) / (N_p - K_{\max})$				
$p[n; l] = \alpha \cdot p[n - 1; l] + (1 - \alpha) \cdot \tilde{d}[n; l] ^2$				
$\hat{K}[n] = \#\{p[n; l]; p[n; l] > \beta \cdot \hat{\rho}[n]\}$				

Tabela 4.7: Estimação dos parâmetros ρ e K .

Utilizando a estimativas recursivas de $P_{\tilde{H}}$ e $P_{\tilde{d}}$, dadas, respectivamente, como

$$\begin{aligned} P_{\tilde{H}}[n] &= \alpha P_{\tilde{H}}[n - 1] + (1 - \alpha) \tilde{\mathbf{H}}_p^H[n] \tilde{\mathbf{H}}_p[n], \\ P_{\tilde{d}}[n] &= \alpha P_{\tilde{d}}[n - 1] + (1 - \alpha) \tilde{\mathbf{d}}^H[n] \tilde{\mathbf{d}}[n], \end{aligned}$$

temos a seguinte estimativa recursiva de ρ :

$$\begin{aligned} \hat{\rho}[n] &= (P_{\tilde{H}}[n] - P_{\tilde{d}}[n]) / (N_p - K_{\max}) \\ &= \alpha \cdot \hat{\rho}[n - 1] + (1 - \alpha) \cdot (\tilde{\mathbf{H}}_p^H[n] \tilde{\mathbf{H}}_p[n] - \tilde{\mathbf{d}}^H[n] \tilde{\mathbf{d}}[n]) / (N_p - K_{\max}). \end{aligned} \quad (4.48)$$

Quanto à estimação da dimensão K do espaço do sinal, sabe-se que

$$\mathbb{E}\{|\tilde{d}[n; l]|^2\} = \kappa d_l + \rho.$$

Portanto, podemos encontrar K selecionando o maior l tal que $\mathbb{E}\{|\tilde{d}[n; l]|^2\} > \rho$. Realiza-se então a estimação recursiva da potência média de cada ramo l como

$$p[n; l] = \alpha \cdot p[n - 1; l] + (1 - \alpha) \cdot |\tilde{d}[n; l]|^2. \quad (4.49)$$

A seguir, estima-se K :

$$\hat{K}[n] = \#\{p[n; l]; p[n; l] > \beta \cdot \hat{\rho}[n]\}. \quad (4.50)$$

O parâmetro $\beta > 1$ foi inserido para evitar a seleção de ramos l satisfazendo $p[n; l] \approx \hat{\rho}[n]$ mas com $p[n; l] > \hat{\rho}[n]$, o que é comum ocorrer devido aos erros de estimação.

O algoritmo constituído pelas equações (4.48), (4.49) e (4.50) é resumido na tabela 4.7.

Na atualização dos coeficientes $\mathbf{c}[n; l]$ dos filtros temporais dada na equação (4.39), a potência média ρ é substituída pela sua estimativa $\hat{\rho}[n]$ dada na equação (4.48).

5 Simulações

O sistema OFDM simulado aqui emprega uma largura de banda total de 800 kHz, com cada símbolo OFDM sendo constituído de $N_c = 128$ sub-portadoras, e um CP de comprimento $N_{cp} = 15$. Os símbolos piloto são alocados em $N_p = 16$ sub-portadoras igualmente espaçadas, com cada um sendo escolhido de uma constelação 4-PSK com igual probabilidade. Os símbolos de dados são selecionados de uma constelação 16-QAM. As amostras do canal foram realizadas de acordo com modelo TDL-Jakes, detalhado na subseção 2.1.2. O filtro formatador de pulso foi escolhido idealmente como a função sinc, em vez de um cosseno-levantado, por simplicidade de simulação. Foi assumida uma potência de canal recebida $\sigma_h^2 = 1$. O número de percursos adotado foi $K = 4$. Em cada “rodada” da simulação, os atrasos τ_k foram independentemente e uniformemente selecionados no intervalo $[0, TN_{cp} - T_g]$, onde o tempo de guarda $T_g = 4T$ foi empiricamente escolhido de modo que o comprimento do canal satisfaça $L \leq N_{cp} + 1$. Os parâmetros de simulação são dados resumidamente na tabela 5.1. Em todos os algoritmos considerados, foi usado o fator $\alpha = 0,99$.

Primeiro, para efeito de comparação, consideraremos que a matriz \mathbf{U} e o número de percursos K do canal são perfeitamente conhecidos. Quanto aos filtros que exploram as correlações temporais do canal, neste caso, temos cinco possibilidades. U-P: A estimativa LS é simplesmente projetada sobre o sub-espaço do sinal. U-Wiener: Os coeficientes da seção temporal são selecionados conforme a equação (3.19), em que supomos serem conhecidos as correlações do canal e os parâmetros κ e ρ , além das potências d_l . U-ERPCa: Os parâmetros κ e ρ também são perfeitamente conhecidos e os coeficientes são dados como na equação (3.19), sendo agora as correlações selecionadas a partir da equação (3.43). U-ERPCb: Como no caso anterior, mas com as correlações dadas na equação (3.45). U-FA: A estimativa é dada pelo algoritmo adaptativo apresentado na tabela 4.6.

A figura 5.1(a), para $\text{SNR} = \sigma_a^2 \sigma_h^2 / \sigma_w^2 = 10$ dB, mostra as curvas de aprendizado desses algoritmos, estimadas a partir da média conjunta de 200 realizações. Nessa figura foram escolhidos os parâmetros $f_d = 500$ Hz e $M_t = 1$, que correspondem ao desvio $\nu_{d,3} = 0,0894$. A figura 5.3(a) mostra o $\overline{\text{MSE}}$ dos algoritmos para diferentes valores de σ_w^2 .

Taxa de amostragem	800 kHz
Número de sub-portadoras	$N_c = 128$
Comprimento do CP	$N_{cp} = 15$
Número de sub-portadoras piloto	$N_p = 16$
Constelação dos símbolos piloto	4-PSK
Constelação dos símbolos de dados	16-QAM
Modelo de canal	TDL-Jakes
Potência do canal	$\sigma_h^2 = 1$
Potência dos símbolos	$\sigma_a^2 = 1$
Número de percursos	$K = K_{\max} = 4$

Tabela 5.1: Parâmetros de simulação.

Na figura 5.3(a) foram adotados os parâmetros $f_d = 200$ Hz e $M_t = 3$, que correspondem a $\nu_{d,3} = 0,1073$. Para calcular o $\overline{\text{MSE}}$ dado na figura 5.3(a), em cada valor de SNR, o $\overline{\text{MSE}}$ é estimado como a média conjunta de 100 realizações; depois, obtém-se o $\overline{\text{MSE}}$ como a média conjunta dos $\overline{\text{MSE}}$ s das iterações de 500 a 1050.

Agora, serão considerados a matriz de Fourier \mathbf{F} como matriz de subespaço, \mathbf{U} estimado pelo LORAF3, e \mathbf{U} estimado pelo OPAST. No caso em que se considera a matriz \mathbf{F} , assume-se que o comprimento L do canal é perfeitamente conhecido. Nos demais casos, o número de percursos K do canal também é conhecido. Analisaremos quatro possibilidades de filtros que exploram as correlações temporais do canal. F-P, LORAF-P, OPAST-P: A estimativa LS é simplesmente projetada sobre a estimativa do sub-espaço do sinal. F-ERa, LORAF3-ERa, OPAST-ERa: Os coeficientes da seção temporal são selecionados conforme a equação (3.48), que não requer o conhecimento dos parâmetros κ e ρ , sendo as correlações selecionadas a partir da equação (3.47). F-ERb, LORAF3-ERb, OPAST-ERb: Como no caso anterior, mas com as correlações dadas na equação (3.45). F-FA, LORAF3-FA, OPAST-FA: A estimativa é dada pelo algoritmo adaptativo mostrado na tabela 4.6.

As figuras 5.1(b) e 5.2, para SNR = 10 dB, mostram as curvas de aprendizado desses algoritmos, estimadas a partir da média conjunta de 200 realizações. Nessas figuras foram escolhidos os parâmetros $f_d = 500$ Hz e $M_t = 1$, que correspondem ao desvio $\nu_{d,3} = 0,1073$. As figuras 5.3(b) e 5.4 mostram o $\overline{\text{MSE}}$ dos algoritmos para diferentes valores de SNR. Nessas figuras foram adotados os parâmetros $f_d = 200$ Hz e $M_t = 3$, que correspondem a $\nu_{d,3} = 0,1073$. Para calcular o $\overline{\text{MSE}}$ dado nessas figuras, em cada valor de SNR, o $\overline{\text{MSE}}$

é estimado como a média conjunta de 100 realizações; depois, obtém-se o $\overline{\text{MSE}}$ como a média conjunta dos $\overline{\text{MSE}}$ s das iterações de 500 a 1050.

Por fim, a figura 5.5 mostra as curvas de aprendizado das estruturas adaptativas U-P, LORAF3-P, OPAST-P, U-FA, LORAF3-FA, OPAST-FA, para $\text{SNR} = 10$ dB, $f_d = 500$ Hz e $M_t = 1$, que correspondem a $\nu_{d,3} = 0, 1073$.

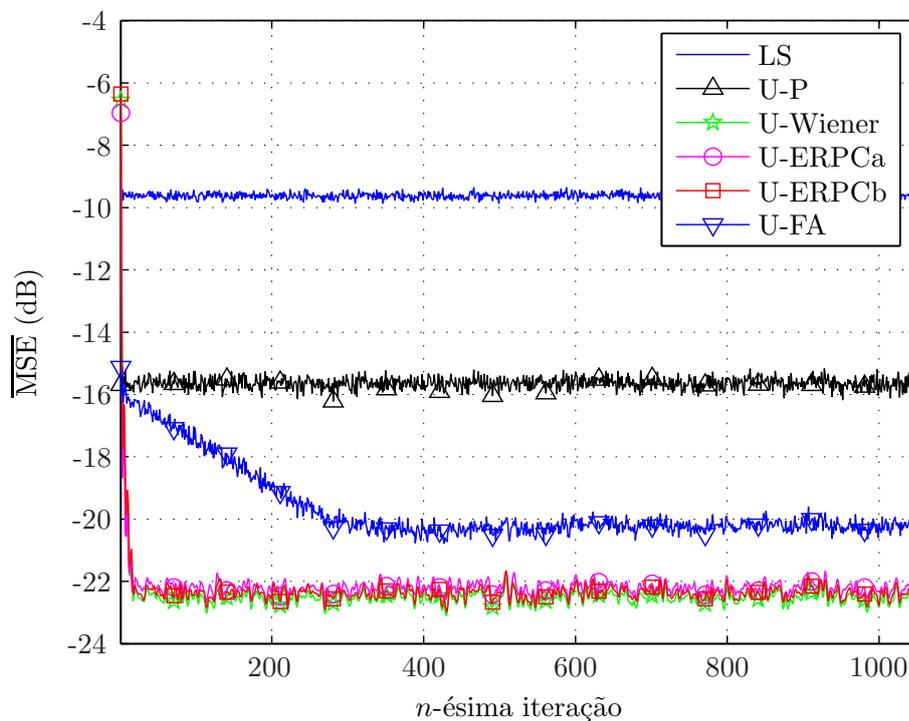
5.1 Comentários

Na figura 5.1(a), observa-se que as duas versões do estimador robusto e o filtro de Wiener, todos têm desempenho similar. Isso se deve ao fato de $\nu_{d,3}$ ser pequeno e de o filtro robusto ser capaz de eliminar o ruído fora das componentes de frequência $[\nu_{d,3}, -\nu_{d,3}]$. Para valores maiores de $\nu_{d,3}$, tal comportamento não mais ocorreria.

Das curvas obtidas, observa-se um melhor desempenho das estruturas cuja seção temporal é implementada pelo filtro robusto. A principal desvantagem da aplicação do filtro robusto está na necessidade de se conhecer a frequência Doppler máxima. No filtro adaptativo, não é preciso nenhum conhecimento prévio. Por outro lado, com uma variação nas correlações do canal no tempo, o algoritmo adaptativo requer um tempo de convergência, enquanto o desempenho do estimador robusto permanece o mesmo, supondo que f_d não mudou. O algoritmo adaptativo demanda maior carga computacional se comparado ao filtro robusto, embora ambos tenham complexidade computacional da mesma ordem.

Como pode ser visto na figura 5.5, embora a diferença entre o $\overline{\text{MSE}}$ das estruturas U-P, LORAF3-P, OPAST-P seja pequena, há maior perda de desempenho das estruturas LORAF3-FA e OPAST-FA se comparadas a U-FA. Essa perda se deve a variações na adaptação do subespaço do sinal.

(a) :

SNR = 10 dB, $f_d = 500$ Hz, $M_t = 1$ 

(b) :

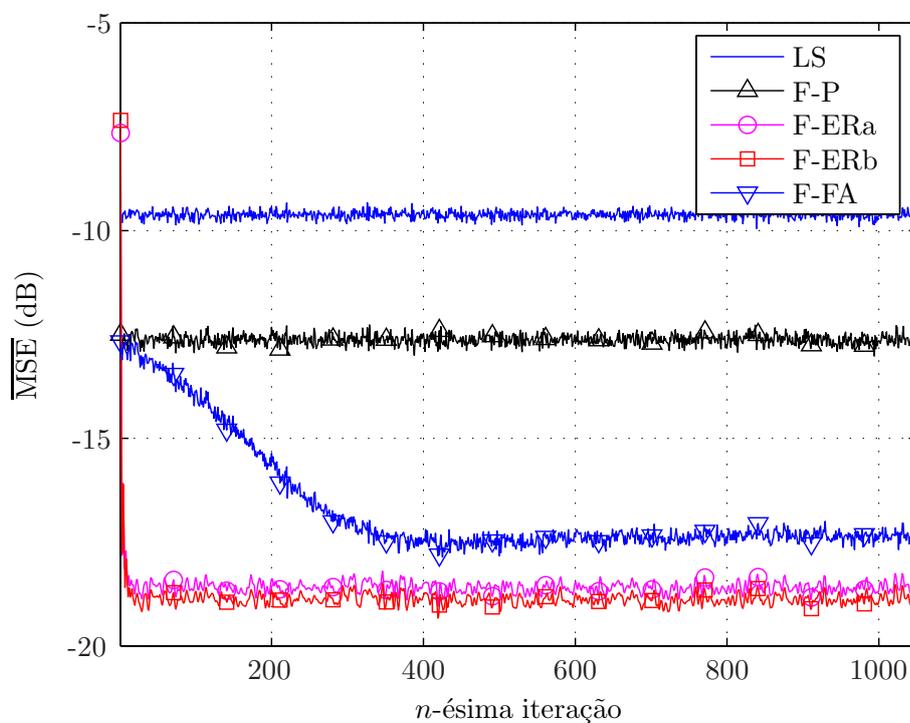
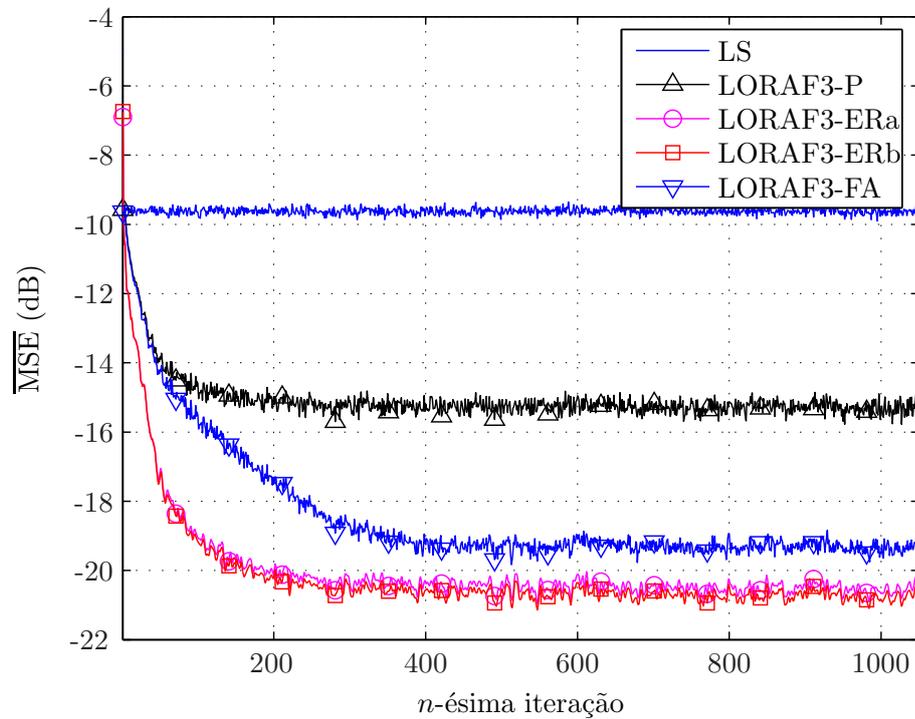
SNR = 10 dB, $f_d = 500$ Hz, $M_t = 1$ 

Figura 5.1: Curvas de aprendizado para (a) \mathbf{U} perfeitamente conhecido e (b) \mathbf{F} como subespaço. Foram adotados SNR = 10 dB, $f_d = 500$ Hz e $M_t = 1$.

(a) :

SNR = 10 dB, $f_d = 500$ Hz, $M_t = 1$ 

(b) :

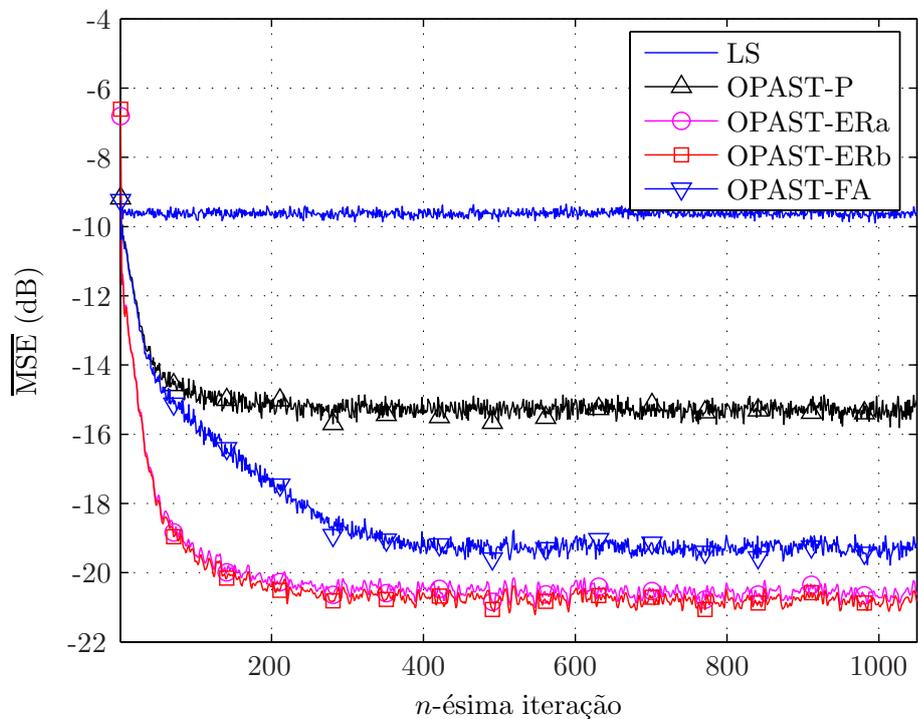
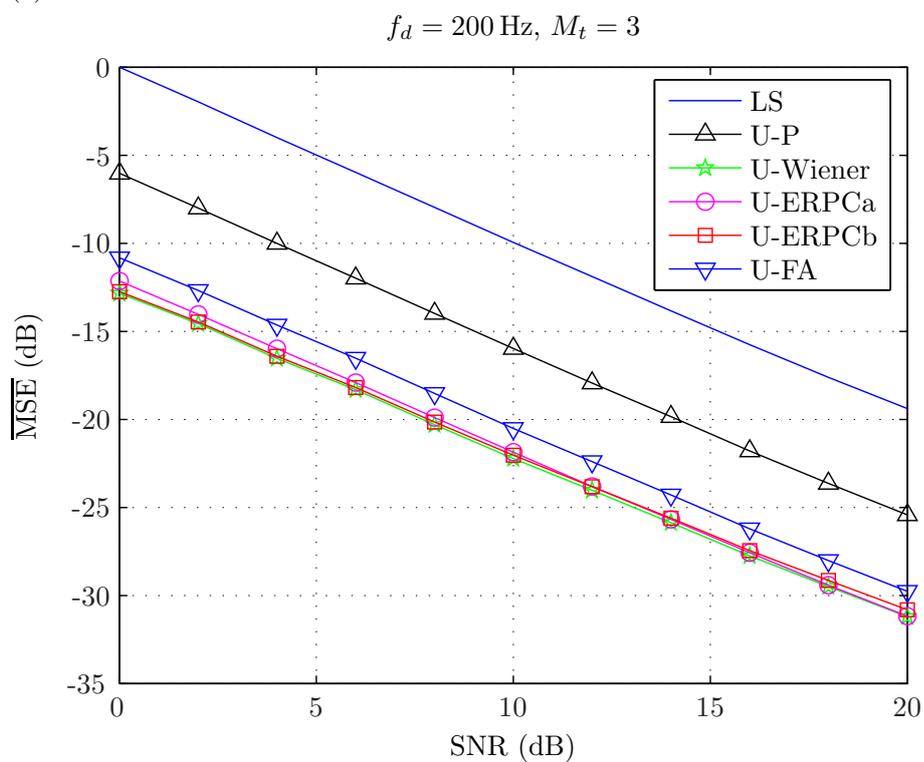
SNR = 10 dB, $f_d = 500$ Hz, $M_t = 1$ 

Figura 5.2: Curvas de aprendizado para \mathbf{U} estimado pelos algoritmos (a) LORAF3 e (b) OPAST. Foram adotados SNR = 10 dB, $f_d = 500$ Hz e $M_t = 1$.

(a) :



(b) :

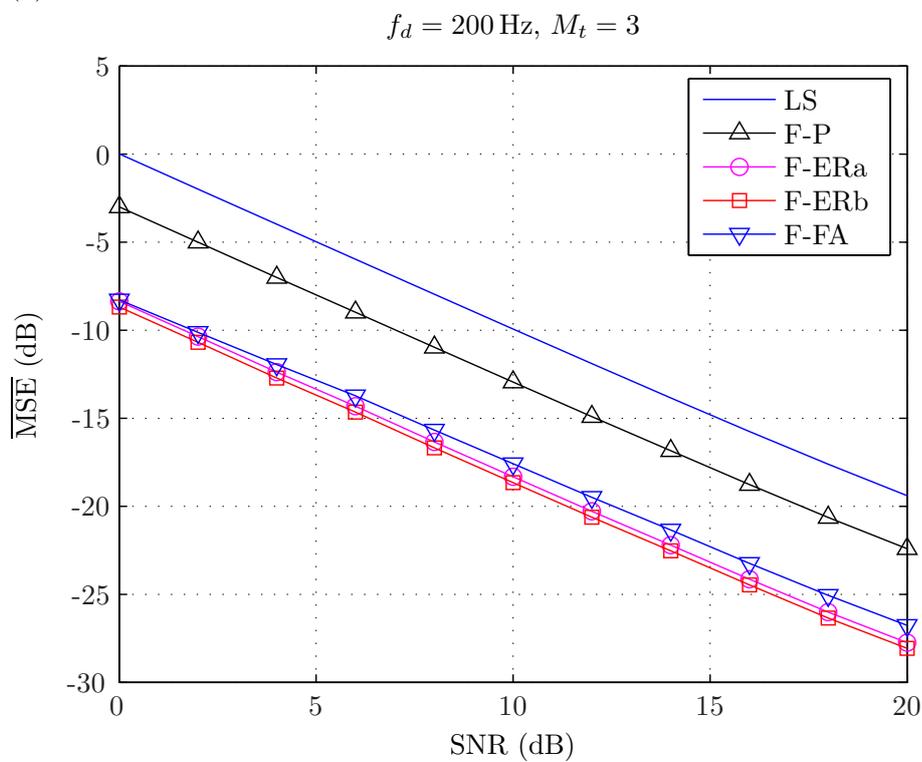
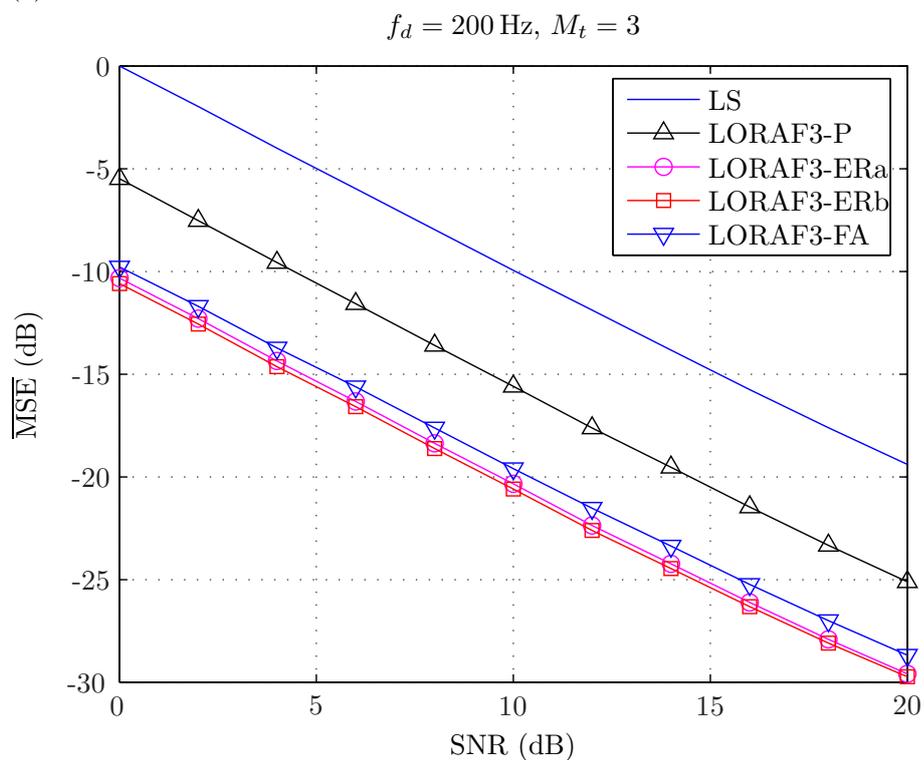


Figura 5.3: Curvas de $\overline{\text{MSE}} \times \text{SNR}$ para (a) \mathbf{U} perfeitamente conhecido e (b) \mathbf{F} como subespaços. Foram adotados $f_d = 200 \text{ Hz}$ e $M_t = 3$.

(a) :



(b) :

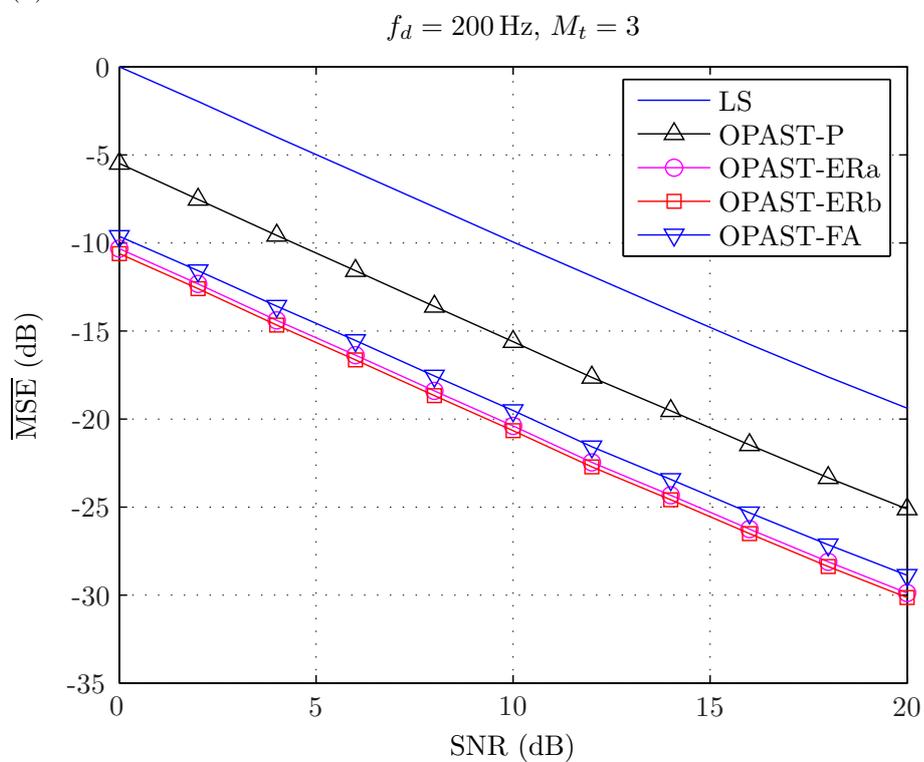


Figura 5.4: Curvas de $\overline{\text{MSE}} \times \text{SNR}$ para \mathbf{U} estimado pelos algoritmos (a) LORAF3 e (b) OPAST. Foram adotados $f_d = 200 \text{ Hz}$ e $M_t = 3$.

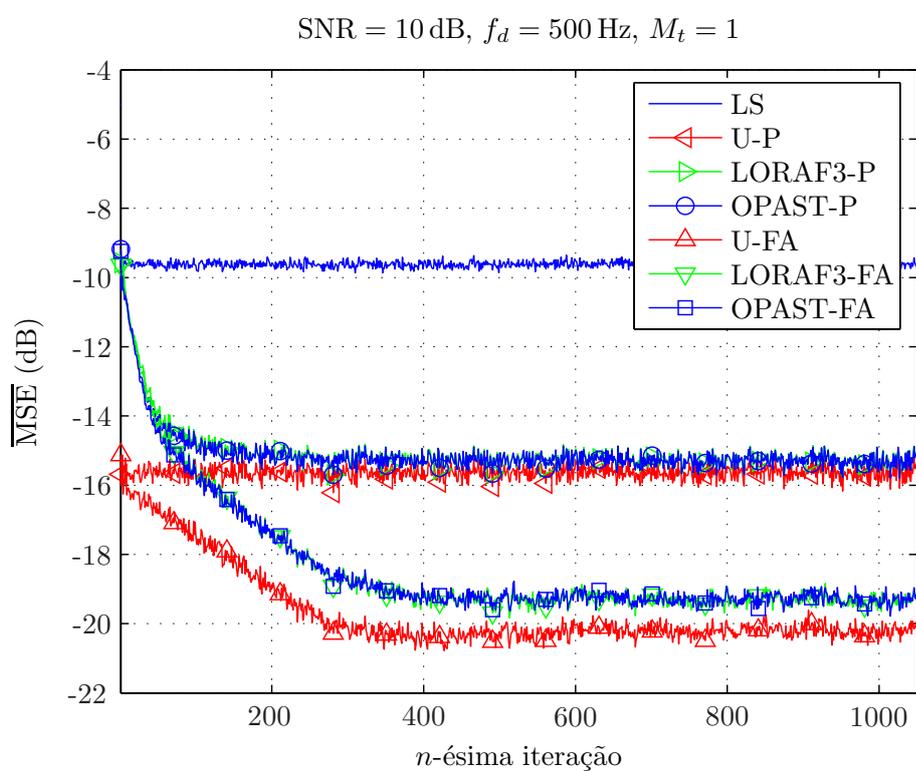


Figura 5.5: Curvas de aprendizado comparativas entre \mathbf{U} perfeitamente conhecido e estimado pelos algoritmos LORAF3 e OPAST. Foram adotados SNR = 10 dB, $f_d = 500$ Hz e $M_t = 1$.

6 Conclusões e Perspectivas

A partir da descrição e análise dadas aos canais com desvanecimento, chegou-se a uma melhor compreensão do sistema OFDM na presença da seletividade temporal do canal. O primeiro resultado é que as sub-portadoras são na verdade a DFT da média conjunta de N_c amostras do canal no domínio do tempo. Tal fato implica que as correlações do canal na frequência devem incluir algumas modificações. Sem essa consideração, os algoritmos baseados no critério MMSE, que necessitam das correlações do canal, podem levar a análises ou resultados inconsistentes. Como a média conjunta do canal tem potência menor, decorre que há uma perda de potência das sub-portadoras. A potência restante aparecendo como potência da ICI. Com a suposição de que o canal obedece o modelo TDL e os sub-símbolos têm todos a mesma potência, foi mostrado que a potência do canal se divide entre a potência da sub-portadora e a potência da ICI, obedecendo a mesma proporção para cada sub-portadora.

Considerando a presença da ICI, foi derivado um estimador MMSE que explora as correlações do canal no tempo e na frequência, a partir da disposição em *grid* das sub-portadoras piloto. Da suposição de que a correlação do canal pode ser separada como o produto entre a correlação no tempo e a correlação na frequência, resulta que o estimador MMSE tem a estrutura de filtragem dada na figura 3.5. No procedimento aplicado ao estimador IIR fica explícito a separação entre as estimativas somente sobre as sub-portadoras piloto e o processo de interpolação, seja no tempo como na frequência. Esse fato não ocorre no estimador FIR. Também foi derivado um algoritmo robusto a partir das correlações que resultam em pior MSE, dadas certas restrições. Foram consideradas as seguintes restrições: 1) a densidade espectral de potência tem suporte limitado pela frequência Doppler máxima, 2) a potência do canal é unitária, 3) a potência da ICI é conhecida.

Quanto à estimação do subespaço de atrasos, foram considerados os algoritmos LORAF e OPAST. É proposto um algoritmo capaz de estimar a variância da ICI mais ruído, e a dimensão do subespaço de atrasos. No LORAF as colunas da matriz de subespaço aproximam os auto-vetores principais. E no OPAST a matriz de subespaço aproxima apenas

o subespaço principal. Tal fato impossibilitou que no OPAST se estimasse a dimensão do subespaço de atrasos. Porém, os dois algoritmos permitem que a variância da ICI mais ruído possa ainda ser estimada pelo método proposto. Da solução MMSE que resulta nos coeficientes dos filtros que exploram as correlações temporais do canal, foi proposto um algoritmo recursivo baseado na identidade de Woodbury e na variância da ICI mais ruído estimada. Por causa da variação no subespaço de atrasos estimado pelos algoritmos ST, esse algoritmo apresentou problemas de instabilidade, com divergência explosiva. Tal problema foi contornado pela aplicação de decomposição QR ao algoritmo adaptativo. Outra vantagem da aplicação de decomposição QR é que o algoritmo resultante é numericamente estável. O algoritmo baseado em decomposição QR suporta uma versão rápida da ordem do comprimento do filtro empregado.

Este trabalho tem ainda diversos desdobramentos. É necessário encontrar uma forma fechada para o estimador robusto que inclui todas as restrições consideradas. O procedimento usado na derivação do estimador robusto requer uma abordagem mais geral. O MSE da saída do estimador robusto não depende das correlações do canal. Isso se deve às correlações de pior MSE, dado certo conjunto de restrições. A mesma idéia pode ser analisada no caso de um estimador MMSE qualquer. Fica também em aberto a questão de como estimar o parâmetro κ e, assim, somente a variância do ruído. Como foi visto nas simulações, embora os algoritmos ST tenham a mesma performance, foi observada certa degradação quando utilizados em conjunto com os filtros que exploram as correlações temporais. Outros algoritmos ST podem ser empregados. A relação entre os algoritmos ST e os filtros temporais requer um estudo mais aprofundado, que pode resultar num algoritmo de adaptação conjunta.

APÊNDICE A – Multiplicadores de Lagrange

Neste apêndice serão expostas as técnicas que permitiram encontrar a equação (3.31), relativa ao problema da maximização da integral dada na equação (3.28), sujeita às restrições das equações (3.29) e (3.30). Uma exposição mais completa do problema de maximização ou minimização com restrição usando multiplicadores de Lagrange pode ser encontrada nas referências [39, 40].

No caso das funções reais sobre a reta real, seus pontos extremos podem ser encontrados primeiro calculando sua derivada e depois encontrando os zeros desta derivada. Tal procedimento pode ser aplicado à integral da equação (3.28), que consideramos como uma função que leva $y(\nu)$ nos reais. Temos então que definir o que seria a derivada dessa função num “ponto” $y(\nu)$.

Sejam $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ espaços de Banach, i.e., espaços vetoriais normados e completos, de modo que definimos

$$B(X, Y) = \{T : X \rightarrow Y : T \text{ é linear e contínua}\}.$$

A seguir apresentamos as definições e teoremas abordados.

Definição 1. Seja $f : U \rightarrow Y$ em que $U \in X$ é aberto, e X e Y são espaços de Banach. A função f é *Fréchet-diferenciável* em $x \in U$ se existe $A \in B(X, Y)$ tal que

$$\frac{\|f(x+h) - f(x) - Ah\|_Y}{\|h\|_X} \rightarrow 0$$

para todo $h \rightarrow 0$. Caso A exista, ele é dito ser a *derivada de Fréchet* de f em x , e é denotado por

$$A = Df(x).$$

Teorema 1. Se $f \in C^1([a, b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ e

$$F(y) = \int_a^b f(x, y(x), y'(x)) dx,$$

então $F : C^1([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável de derivada contínua e

$$DF(y)(h) = \int_a^b [D_2f(x, y(x), y'(x))h(x) + D_3f(x, y(x), y'(x))h'(x)]dx$$

para todo $h \in C^1([a, b])$.

Teorema 2 (Multiplicadores de Lagrange). Seja X um espaço de Banach, $U \subset X$ aberto, e $f, g_i : U \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, m$, diferenciáveis de derivada contínua. Se $x \in M$ é um extremo local para $f|_M$, em que

$$M = \{x \in U : g_i(x) = 0 \text{ para todo } i\},$$

então existe $\lambda = (\lambda_0, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^{m+1}$ diferente de zero tal que

$$\lambda_0 Df(x) + \lambda_1 Dg_1(x) + \dots + \lambda_m Dg_m(x) = 0.$$

Dadas as ferramentas necessárias, agora podemos explorar o problema considerado. Como

$$\frac{\rho' d_t m_t(\nu) y(\nu)}{\rho' + d_t m_t(\nu) y(\nu)} = 1 - \frac{\rho'}{\rho' + d_t m_t(\nu) y(\nu)}$$

podemos reescrever o problema de maximização agora como um de minimização:

$$\begin{aligned} \text{minimize: } F(y) &= \int_{-\nu_{d,1}}^{\nu_{d,1}} \frac{1}{\rho' + d_t m_t(\nu) y(\nu)} d\nu; \\ \text{restrito a: } g_1(y) &= \int_{-\nu_{d,1}}^{\nu_{d,1}} m_t(\nu) y(\nu) d\nu - \kappa = 0, \\ g_2(y) &= \int_{-\nu_{d,1}}^{\nu_{d,1}} y(\nu) d\nu - 1 = 0, \end{aligned}$$

Seja

$$f(\nu_1, \nu_2) = \frac{\rho'}{\rho' + d_t m_t(\nu_1) \nu_2}$$

para $\nu_1 \in [-\nu_{d,1}, \nu_{d,1}]$ e $\nu_2 \in \mathbb{R}$. Conforme o teorema 1, temos que a derivada de Fréchet de

$$F(y) = \int_{-\nu_{d,1}}^{\nu_{d,1}} f(\nu, y(\nu)) d\nu$$

é dada por

$$DF(y)(h) = \int_{-\nu_{d,1}}^{\nu_{d,1}} D_2f(\nu, y(\nu))h(\nu) d\nu.$$

Visto que

$$D_2f(\nu_1, \nu_2) = -\frac{d_t m_t(\nu_1)}{[\rho' + d_t m_t(\nu_1) \nu_2]^2},$$

temos, portanto,

$$DF(y)(h) = \int_{-\nu_{d,1}}^{\nu_{d,1}} \frac{-d_t m_t(\nu) h(\nu)}{[\rho' + d_t m_t(\nu) y(\nu)]^2} d\nu.$$

Como a derivada de Fréchet de $f(x) = Ax$, em que $A \in B(X, Y)$, é $Df(x) = A$, obtemos que

$$Dg_1(y)(h) = \int_{-\nu_{d,1}}^{\nu_{d,1}} m_t(\nu) h(\nu) d\nu, \quad Dg_2(y)(h) = \int_{-\nu_{d,1}}^{\nu_{d,1}} h(\nu) d\nu.$$

Portanto, conforme o teorema 2, um extremo local de $F(y)$ deve satisfazer

$$\int_{-\nu_{d,1}}^{\nu_{d,1}} \frac{-d_t m_t(\nu) h(\nu)}{[\rho' + d_t m_t(\nu) y(\nu)]^2} d\nu + \lambda_1 \int_{-\nu_{d,1}}^{\nu_{d,1}} m_t(\nu) h(\nu) d\nu + \lambda_2 \int_{-\nu_{d,1}}^{\nu_{d,1}} h(\nu) d\nu,$$

ou, equivalentemente,

$$-\frac{d_t m_t(\nu)}{[\rho' + d_t m_t(\nu) y(\nu)]^2} + \lambda_1 m_t(\nu) + \lambda_2 = 0,$$

que é igual à equação (3.31).

APÊNDICE B – Métodos Numéricos

Este apêndice trata das *rotações de Givens* e do *algoritmo de back-substitution*. Uma abordagem mais completa é encontrada em [41].

B.1 Rotações de Givens

Uma rotação de Givens consiste de uma matriz unitária, cuja aplicação afeta apenas duas linhas da matriz em que é aplicada. A rotação de Givens $n \times n$ tem a forma

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & c^* & \cdots & s^* & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & -s & \cdots & c & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix},$$

em que $|c|^2 + |s|^2 = 1$. Os termos c^* e c , respectivamente, ocupam a i -ésima e k -ésima posição na diagonal de \mathbf{G} . Seja \mathbf{A} uma matriz $n \times m$ de elementos x_{ij} na posição ij . Se escolhermos

$$c = \frac{x_{ij}}{\sqrt{|x_{ij}|^2 + |x_{kj}|^2}}$$

$$s = \frac{x_{kj}}{\sqrt{|x_{ij}|^2 + |x_{kj}|^2}},$$

teremos que $\mathbf{G} \cdot \mathbf{A}$ tem 0 em sua entrada kj .

Como a aplicação de \mathbf{G} afeta apenas duas linhas da matriz \mathbf{A} , uma seqüência de rotações de Givens pode ser aplicada no cálculo da decomposição QR. Abaixo temos uma ilustração de como uma seqüência de rotações de Givens pode ser aplicada no cálculo da

matriz diagonal \mathbf{R} para $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{4 \times 3}$:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \times & \times & \times \\ \times & \times & \times \\ \underline{\times} & \times & \times \\ \underline{\times} & \times & \times \end{pmatrix} &\xrightarrow{(3,4)} \begin{pmatrix} \times & \times & \times \\ \underline{\times} & \times & \times \\ \underline{\times} & \times & \times \\ 0 & \times & \times \end{pmatrix} \xrightarrow{(2,3)} \begin{pmatrix} \underline{\times} & \times & \times \\ \underline{\times} & \times & \times \\ 0 & \times & \times \\ 0 & \times & \times \end{pmatrix} \xrightarrow{(1,2)} \\ \begin{pmatrix} \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times \\ 0 & \underline{\times} & \times \\ 0 & \underline{\times} & \times \end{pmatrix} &\xrightarrow{(3,4)} \begin{pmatrix} \times & \times & \times \\ 0 & \underline{\times} & \times \\ 0 & \underline{\times} & \times \\ 0 & 0 & \times \end{pmatrix} \xrightarrow{(2,3)} \begin{pmatrix} \times & \underline{\times} & \times \\ 0 & \underline{\times} & \times \\ 0 & 0 & \times \\ 0 & 0 & \times \end{pmatrix} \xrightarrow{(1,2)} \mathbf{R} \end{aligned}$$

Primeiramente, os últimos $n - 1$ elementos da primeira coluna são anulados usando as linhas consecutivas $i - 1$ e i . A seguir, outra seqüência é aplicada, anulando os $n - 2$ últimos elementos da segunda coluna. O mesmo procedimento é usado nas colunas restantes. Em resumo, temos:

para $j = 1, \dots, n$

para $i = m, \dots, j + 1$

$$c = x_{i-1,j} / \sqrt{|x_{i-1,j}|^2 + |x_{ij}|^2}$$

$$s = x_{ij} / \sqrt{|x_{i-1,j}|^2 + |x_{ij}|^2}$$

$$\mathbf{A}_{i-1:i,j:n} = \begin{bmatrix} c^* & s^* \\ -s & c \end{bmatrix} \mathbf{A}_{i-1:i,j:n}$$

fim

fim

A decomposição QR por rotações de Givens possui uma versão rápida, que evita o cálculo da raiz quadrada [41].

B.2 Back-substitution

O método *back-substitution* permite resolver o sistema de equações $\mathbf{U}\mathbf{x} = \mathbf{b}$, em que $\mathbf{U} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ é triangular superior. Sejam u_{ij} , x_i e b_i os elementos de \mathbf{U} , \mathbf{x} e \mathbf{b} , respectivamente. O elemento x_n é simplesmente calculado como $x_n = b_n / u_{nn}$. Considerando a penúltima linha do sistema de equações, temos $u_{n-1,n-1}x_{n-1} + u_{n-1,n}x_n = b_{n-1}$. Por x_n já ter sido calculado, podemos encontrar $x_{n-1} = (b_{n-1} - u_{n-1,n}x_n) / u_{n-1,n-1}$. Continuando com este processo, o i -ésimo elemento de \mathbf{x} é então calculado como

$$x_i = \left(b_i - \sum_{j=i+1}^n u_{ij}x_j \right) / u_{ii}.$$

Temos então o seguinte algoritmo:

$$b_n = x_n/u_{nn}$$

para $i = n - 1, \dots, 1$

$$b_i = (b_i - \mathbf{U}_{i,i+1:n} \mathbf{b}_{i+1:n})/u_{ii}$$

fim

Uma análise dos erros de precisão finita é encontrada em [41].

Referências Bibliográficas

- [1] J. A. C. Bingham, “Multicarrier modulation for data transmission: an idea whose time has come,” *IEEE Communications Magazine*, vol. 28, no. 5, pp. 5–14, Maio 1990.
- [2] S. B. Weinstein e P. M. Ebert, “Data transmission by frequency-division multiplexing using the discrete fourier transform,” *IEEE Transactions on Communication Technology*, vol. COM-19, no. 5, pp. 628–634, Outubro 1971.
- [3] L. J. Cimini Jr., “Analysis and simulation of a digital mobile channel using orthogonal frequency division multiplexing,” *IEEE Transactions on Communications*, vol. 33, no. 7, pp. 665–675, Julho 1985.
- [4] *ETS 300 401 – Radio Broadcasting System, Digital Audio Broadcasting (DAB) to Mobile, Portable, and Fixed Receivers*, 2ª edição, ETSI, Maio 1997.
- [5] *ETS 300 744 – Digital Broadcasting Systems for Television, Sound and Data Service; Framing Structure, Channel Coding and Modulation for Digital Terrestrial Television*, ETSI, Abril 1996.
- [6] J. Khun-Jush, G. Malmgren, P. Schramm e J. Torsner, “Overview and performance of HIPERLAN type 2 – a standard for broadband wireless communications,” in *IEEE 51st Vehicular Technology Conference Proceedings (VTC’00-Spring)*, vol. 1, Tokyo, 2000, pp. 112–117.
- [7] *Wireless LAN Medium Access Control (MAC) and Physical Layer (PHY) Specifications*, IEEE Standard 802.11.
- [8] *Wireless LAN Medium Access Control (MAC) and Physical Layer (PHY) Specifications*, IEEE Standard 802.11g, 2003.
- [9] *IEEE Standard for Local and Metropolitan Area Networks – Part 16: Air Interface for Fixed Broadband Wireless Access Systems*, IEEE Standard 802.16-2004, 2004.
- [10] P. Nicopolitidis, M. S. Obaidat, G. I. Papadimitriou e A. S. Pompostsis, *Wireless Networks*. John Wiley, 2003.
- [11] *Wireless Medium Access Control (MAC) and Physical Layer (PHY) Specifications for High Rate Wireless Personal Area Networks (WPAN)*, IEEE Standard 802.15.3, 2003.
- [12] Y. Li e L. J. Cimini Jr., “Bounds on the interchannel interference of OFDM in time-varying impairments,” *IEEE Transactions on Communications*, vol. 49, no. 3, pp. 401–404, Março 2001.

- [13] P. H. Moose, "A technique for orthogonal frequency division multiplexing frequency offset correction," *IEEE Transactions on Communications*, vol. 42, no. 10, pp. 2908–2914, Outubro 1994.
- [14] J. van de Beek, M. Sandell e P. O. Borjesson, "ML estimation of time and frequency offset in OFDM systems," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 45, no. 7, pp. 1800–1805, Julho 1997.
- [15] S. H. Müller-Weinfurtner, "On the optimality of metrics for coarse frame synchronization in OFDM: a comparison," in *Proceedings of IEEE International Symposium on Personal, Indoor and Mobile Radio Communications (PIMRC'98)*, Setembro 1998, pp. 533–537.
- [16] A. Peled e A. Ruiz, "Frequency domain data transmission using reduced computationally complexity algorithms," in *Proceedings of IEEE International Conference of Acoustics, Speech and Signal Processing*, Denver, 1980, pp. 964–967.
- [17] S. Coleri, M. Ergen, A. Puri e A. Bahai, "Channel estimation techniques based on pilot arrangement in OFDM systems," *IEEE Transactions on Broadcasting*, vol. 48, no. 3, pp. 223–229, Setembro 2002.
- [18] J. Kim, J. Park e D. Hong, "Performance analysis of channel estimation in OFDM systems," *IEEE Signal Processing Letters*, vol. 12, no. 1, pp. 60–62, Janeiro 2005.
- [19] J. Proakis, *Digital Communications*. McGraw-Hill, 2001.
- [20] S. M. Alamouti, "A simple transmit diversity technique for wireless communications," *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, vol. 16, no. 8, pp. 1451–1458, Outubro 1998.
- [21] J.-J. van de Beek, O. Edfors, M. Sandell, S. K. Wilson e P. O. Borjesson, "On channel estimation in OFDM systems," in *IEEE 45th Vehicular Technology Conference*, vol. 2, 1995, pp. 815–819.
- [22] O. Edfors, M. Sandell, J.-J. van de Beek, S. K. Wilson e P. O. Borjesson, "OFDM channel estimation by singular value decomposition," *IEEE Transactions on Communications*, vol. 46, no. 7, pp. 931–939, Julho 1998.
- [23] Y. Li, L. J. Cimini Jr. e N. R. Sollenberger, "Robust channel estimation for OFDM systems with rapid dispersive fading channels," *IEEE Transactions on Communications*, vol. 46, no. 7, pp. 902–915, Julho 1998.
- [24] O. Simeone, Y. Bar-Ness e U. Spagnolini, "Pilot-based channel estimation for ofdm systems by tracking the delay-subspace," *IEEE Transactions on Wireless Communications*, vol. 3, no. 1, pp. 315–325, Janeiro 2004.
- [25] J. Cai, X. Shen e J. W. Mark, "Robust channel estimation for OFDM wireless communication systems – An H_∞ approach," *IEEE Transaction on Wireless Communications*, vol. 3, no. 6, pp. 2060–2071, Novembro 2004.
- [26] R. Zhang e W. Chen, "A mixture kalman filter approach for blind OFDM channel estimation," in *Conference Record of the Thirty-Eighth Asilomar Conference on Signals, Systems and Computers*, vol. 1, Novembro 2004, pp. 350–354.

- [27] S. M. Kay, *Fundamentals of Statistical Signal Processing: Estimation Theory*. Prentice-Hall, 1993.
- [28] L. L. Scharf, *Statistical Signal Processing: Detection, Estimation, and Time Series Analysis*. Addison-Wesley, 1991.
- [29] Y. Li, "Pilot-symbol-aided channel estimation for OFDM in wireless systems," *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, vol. 49, no. 4, pp. 1207–1215, Julho 2000.
- [30] L. Yue, L. Zi, C. Yueming e X. Youyun, "An improved channel estimation scheme for OFDM systems by tracking the subspace," in *14th IEEE Proceedings on Personal, Indoor and Mobile Radio Communications, (PIMRC'03)*, vol. 2, Setembro 2003, pp. 1109–1113.
- [31] R. F. Vigelis, D. C. Moreira, J. C. M. Mota e C. C. Cavalcante, "Filtered delay-subspace approach for pilot assisted channel estimation in OFDM systems," in *Proceedings of the VII IEEE Workshop on Signal Processing Advances for Wireless Communications (SPAWC'06)*, Cannes, Julho 2006.
- [32] S. Haykin, *Adaptive Filter Theory*. Prentice Hall, 2002.
- [33] P. Strobach, "Low-rank adaptive filters," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 44, no. 12, pp. 2932–2947, Dezembro 1996.
- [34] B. Yang, "Projection approximation subspace tracking," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 43, no. 1, pp. 95–107, Janeiro 1995.
- [35] K. Abed-Meraim, A. Chkeif e Y. Hua, "Fast orthonormal PAST algorithm," *IEEE Signal Processing Letters*, vol. 7, no. 3, pp. 60–62, Março 2000.
- [36] W. C. Jakes, *Microwave Mobile Communications*. New York: IEEE Press, 1974.
- [37] A. V. Oppenheim, R. W. Schaffer e J. R. Buck, *Discrete-Time Signal Processing*, 2ª edição. Prentice Hall, 1999.
- [38] A. Papoulis e S. U. Pillai, *Probability, Random Variables and Stochastic Processes*, 4ª edição. McGraw-Hill, 2001.
- [39] I. M. Gelfand e S. V. Fomin, *Calculus of Variations*. Dover, 1991.
- [40] L. Debnath e P. Mikusinski, *Introduction to Hilbert Spaces with Applications*, 2ª edição. Academic Press, 1999.
- [41] G. H. Golub e C. F. van Loan, *Matrix Computations*, 3ª edição. The Johns Hopkins University Press, 1996.